

С. Н. КЛЕПИКОВ

**РАСЧЕТ
КОНСТРУКЦИЙ
НА УПРУГОМ
ОСНОВАНИИ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «БУДІВЕЛЬНИК»
К И Е В — 1967

Конструкции, опирающиеся на упругое основание, имеют самое широкое применение в строительстве. Примерами упругого основания могут служить грунт или сваи, на которые опирается сооружение, близко расположенные друг от друга колонны, балки или ригели рам, на которых лежит какая-либо конструкция (балка, ферма) и др. В настоящей книге под упругим основанием подразумевается в основном естественное грунтовое или свайное основание

Методы расчета конструкций, лежащих на грунте, в зависимости от принятых моделей основания можно разбить на три группы 1) методы, базирующиеся на винклеровой модели основания; 2) методы, базирующиеся на теории упругого полупространства; 3) методы, базирующиеся на комбинированных моделях упругого основания. Наиболее приемлемой для практических целей моделью является винклерово основание. При правильном выборе численного значения коэффициента жесткости основания и учета в необходимых случаях его переменности результаты расчета конструкций с использованием этой модели близко соответствуют опытными данным. Такой вывод можно сделать, анализируя результаты экспериментальных исследований, проведенных за последние 10—15 лет в Советском Союзе и за рубежом. Это прежде всего обширные опыты со штампами Л. И. Манвелова и Э. С. Бартошевича, исследования И. И. Черкасова, опыты с балками конечной жесткости Ф. С. Кадыш, Е. К. Массальского и др.

Теория расчета конструкций, лежащих на упругом винклеровом основании, благодаря трудам К. Хаяси,

А. Н. Крылова, В. А. Киселева, Б. Г. Коренева и ряда других исследователей достигла к настоящему времени значительного развития. Однако существующие методы расчета охватывают в основном балки и плиты и разработаны применительно к постоянному коэффициенту жесткости основания. В последние годы в связи с массовым строительством крупнопанельных зданий, расчетная схема которых может быть упрощенно представлена в виде балки на упругом основании, все больше уделяется внимания учету переменной сжимаемости поверхности грунтового основания в пределах плана сооружения. Появились работы Д. Д. Сергеева, В. А. Барсова, П. П. Шагина, В. И. Лишака, Д. Н. Соболева и автора этой книги по расчету балок на упругом основании переменной жесткости.

Из зарубежных работ по расчету балок на упругом винклеровом основании можно отметить книгу Хетеньи, статьи Опладена, Грасгофа и Иенне. За рубежом расчет конструкций на упругом основании выполняется только исходя из гипотезы прямой пропорциональности, т. е. винклерового основания.

Недостатком большинства работ по расчету конструкций на упругом винклеровом основании является отсутствие в них указаний по определению одного из главнейших исходных данных для расчета — коэффициента жесткости грунтового основания. Кроме того, отсутствуют комплексные работы, в которых рассматривались бы в общей постановке не только балки или плиты, но и другие виды конструкций, применяемых в строительной практике (перекрестные балки, рамы, балки-стенки). До настоящего времени проектировщики не имеют таких комплексных пособий по расчету.

Цель издания настоящей работы состоит в том, чтобы в известной мере восполнить имеющиеся пробелы в литературе по расчету конструкций на упругом основании и дать проектировщикам практическое пособие по расчету различных конструкций на упругом основании как постоянной, так и переменной жесткости, а также по определению коэффициентов жесткости

основания. Методы расчета, примененные и развитые в настоящей книге, относятся к категории численных методов; состав вычислительных операций весьма прост и легко доступен рядовому проектировщику. Большинство рассмотренных задач сведены в конечном итоге к решению готовых систем линейных алгебраических уравнений, число которых может выбираться произвольно в зависимости от желаемой точности результатов. При небольшом числе уравнений их можно решать вручную, при значительном количестве уравнений следует пользоваться стандартными программами решения систем линейных алгебраических уравнений на электронных цифровых вычислительных машинах.

При расчете конструкций на грунтовом основании предлагается оценивать жесткость последнего, исходя из ожидаемых осадок поверхности основания. При этом для определения коэффициента жесткости основания предлагается исходить из среднего значения давления под подошвой фундамента, а осадку вычислять любым из проверенных на практике методом расчета оснований. Такой прием определения жесткостной характеристики основания, которая в общем случае оказывается переменной в плане сооружения, позволяет свести задачу к расчету конструкций, опирающихся на винклерово основание с постоянным или переменным коэффициентом жесткости. Но здесь в понятие коэффициента жесткости заложен иной смысл, чем в традиционной модели Винклера.

Вопросы, связанные с определением коэффициентов жесткости для грунтовых и свайных оснований, рассматриваются в первой главе. Необходимо подчеркнуть, что ряд упрощений, принимаемых здесь, вполне оправдан приближенностью исходных данных о работе грунта.

Вторая глава содержит указания по расчету изгибаемых балок; готовые системы уравнений для балок постоянной и переменной по длине жесткости, лежащих на упругом основании произвольной жесткости; таблицы для расчета балок при постоянном коэффициенте жесткости основания.

В третьей главе описан метод расчета балок на кручение и даны готовые матрицы коэффициентов расчетных уравнений для общего и частных случаев расчета балок.

В четвертой, пятой, шестой и седьмой главах излагаются соответственно вопросы расчета систем перекрестных балок, рам, балок-стенок и плит, опирающихся на упругое основание произвольной жесткости.

Следует заметить, что конструкции на упругом основании относятся к категории статически неопределимых систем, в которых усилия зависят от абсолютных значений жесткостей элементов конструкций. В случае железобетонных конструкций жесткость последних в процессе увеличения нагрузки падает (вследствие появления и раскрытия трещин в растянутом бетоне, влияния пластических деформаций в сжатом бетоне и др.), что оказывает влияние на величины и распределение усилий в конструкции. Учет этого обстоятельства не представляет принципиальных затруднений: усилия, полученные в результате расчета упругой системы, используются для определения жесткостей, которые вводятся в повторный расчет. Задача сводится, таким образом, к многократному расчету с уточняемыми в процессе последовательных приближений жесткостями, что при применении электронных вычислительных машин не вызывает дополнительных трудностей.

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЖЕСТКОСТЕЙ ЕСТЕСТВЕННЫХ И ИСКУССТВЕННЫХ ОСНОВАНИЙ СООРУЖЕНИЙ

Винклерова модель основания

Нагрузка от сооружения передается через его подошву на основание. Под влиянием указанной нагрузки возникают осадки основания. Полный учет природных механических свойств грунтовых оснований, проявляющихся при их нагружении, практически невозможен. Поэтому для определения деформативно-напряженного состояния оснований и сооружений используется расчетная модель основания, схематически описывающая природные механические процессы, протекающие в грунтах. Очевидно, что для получения достаточно достоверных результатов расчета модель должна правильно отображать главные механические свойства грунтового основания.

Исторически первой моделью грунтового основания является модель Фусса-Винклера, часто именуемая в технической литературе винклеровым основанием или гипотезой коэффициента постели. Расчетная механическая модель винклерового основания представляет собой ряд не связанных между собой упругих пружинок, укрепленных на жестком основании (рис. 1). Штамп, приложенный к поверхности модели, при нагружении вдавливается на глубину, пропорциональную среднему удельному давлению, а при снятии нагрузки возвращается в исходное положение. Поверхность модели за пределами штампа не деформируется.

Механические свойства модели характеризуются коэффициентом жесткости K , называемым также часто коэффициентом постели основания. По физическому смыслу коэффициент жесткости означает величину усилия в кг, которое необходимо приложить к 1 см^2 поверхности основания, чтобы последнее осело на 1 см .

Для плит размерность коэффициента жесткости — кг/см^3 ; для балок при ширине подошвы b вычисляется погонный коэффициент постели

$$K_n = Kb,$$

его размерность — кг/см^2 (или т/м^2). В случае абсолютно жесткого основания $K = \infty$; абсолютно податливого — $K = 0$.

При таких условиях реактивное давление основания p в каждой точке контакта подошвы фундамента сооружения с грунтом пропорционально осадке δ грунта в этой точке, т. е.

$$p = K\delta. \quad (1)$$

Эта зависимость является фундаментальным уравнением всей теории расчета конструкций на упругом винклеровом основании.

Кроме того, в расчетах обычно принимаются следующие допущения:

фундамент сохраняет связь с основанием независимо от знака перемещения, т. е. между балкой и основанием не должно быть разрывности;

между фундаментом и поверхностью грунта при изгибе отсутствует трение;

все деформации предполагаются достаточно малыми, благодаря чему можно пользоваться принципом наложения, суммируя деформации от различных воздействий.

Винклерова модель является самой простой из всех существующих расчетных схем грунтового основания. При правильном выборе значений коэффициента жесткости расчет, основанный на такой схематизации грунта, для большинства случаев практики дает удовлетворительное по точности приближенное решение.

С формальной точки зрения винклерова модель не является достаточно строгой. Действительно, наблюдения за натурными сооружениями и экспериментальные исследования работы оснований и фундаментов показывают, что осадка основания зависит

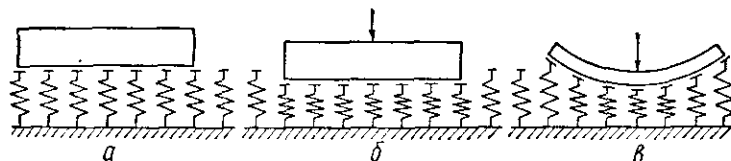


Рис. 1. Винклерова модель основания:

a — исходное положение штампа и поверхности модели; b — деформация поверхности при нагружении штампа; c — изгиб гибкой балки.

не только от нагрузки в данной точке, но и от нагрузки соседних точек; что грунт оседает не только под фундаментом, но и по соседству с ним; что величина коэффициента постели зависит не только от вида грунта, но также от величины и формы загруженной площади и, наконец, что грунт на растяжение не работает. Эти формальные недостатки модели привели к появлению предложений о замене ее в практических расчетах моделью упругого полупространства и возникновению ряда новых моделей грунтового основания, в большей или меньшей мере устраняющих указанные недостатки. Однако степень погрешности, вносимая гипотезой

коэффициента постели в расчет конструкций на грунтовом основании, при этом не была в должной мере оценена. Не были также выполнены достаточно достоверные опытные исследования тех или иных моделей. И только благодаря проведенным в последние десять лет экспериментальным работам по изучению распределительных свойств самых различных категорий грунтов в их естественном залегании и исследованию работы опытных балок на грунтовом основании выяснилось, что винклерова модель основания дает хорошее приближение к действительности и ее следует использовать при проектировании. Здесь прежде всего необходимо отметить обширные эксперименты Л. И. Манвелова и Э. С. Бартошевича [28], исследования И. И. Черкасова [47], опыты Ф. С. Кадыш [18], Е. К. Массальского [29, 30].

Проведенные испытания показали следующее.

1. Деформации поверхности грунта за пределами загруженной части очень быстро затухают, поэтому грунты обладают весьма малой распределительной способностью. Модель упругого полупространства сильно преувеличивает распределительную способность грунта и опытами не подтверждается. Хорошую сходимость опытных и теоретических кривых осадок дает модель основания с двумя коэффициентами постели, предложенная П. Л. Пастернаком. В качестве примера на рис. 2 приведены кривые деформаций поверхности пылеватого суглинка при установке штампа диаметром 716 мм на глубине 80 см при давлении $0,8 \text{ кг/см}^2$ [28].

2. Сравнительные расчеты, выполненные Л. И. Манвеловым и Э. С. Бартошевичем, показали, что винклерова модель, полностью пренебрегающая осадками вне грузовой площади, приводит к практически совпадающим результатам с моделью П. Л. Пастернака при определении прогибов и усилий в плитах. Следовательно, модель Винклера может применяться для практических расчетов конструкций, лежащих на грунтовом основании. Более того, результаты обработки материалов полевых и лабораторных исследований грунтов, как правило, приводят к необходимости применения именно винклеровой модели и лишь в редких случаях (например, скальные грунты) дают основание для выбора модели однородного упругого полупространства [47].

3. Исследования действительной работы балок, лежащих на различных грунтовых основаниях (насыпной песок, уплотненный илистый грунт), также подтвердили правильность вывода о при-

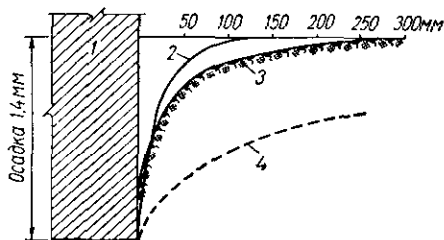


Рис. 2. Кривые осадок поверхности пылеватого суглинка:

1 — штамп; 2 — кривая по модели основания с двумя коэффициентами постели; 3 — экспериментальная кривая; 4 — кривая по модели упругого полупространства.

емлемости модели Винклера для практических расчетов [18, 29, 46]. Эпюры осадок и изгибающих моментов, построенные на основе опытных и теоретических данных, показали, что действительные условия работы системы «балка-основание» наилучшим образом отражает винклерова модель.

4. Опыты свидетельствуют о том, что величина коэффициента жесткости основания зависит не только от вида грунта, но и от размеров и формы подошвы фундамента. Однако это обстоятельство не может служить основанием для критики модели в целом, так как при определении коэффициента жесткости можно учесть и форму и размеры фундамента. Этот вопрос подробно рассматривается далее. Здесь лишь отметим, что правильный выбор численных значений коэффициента жесткости позволяет довольно просто учитывать не только указанные факторы, но также неоднородность основания по глубине и в плане, деформации ползучести и упруго-пластические свойства грунтов, чего нельзя сказать ни об одной из существующих моделей основания.

Таковы основные результаты проведенных до настоящего времени экспериментальных исследований, преследовавших цель установления соответствия различных расчетных моделей основания действительным условиям работы грунта и лежащих на нем конструкций.

Что касается предпосылки об одинаковой сопротивляемости грунтов сжатию и растяжению, принятой, кстати, во всех моделях упругого основания, то она, конечно, не соответствует физической природе грунтов.

Однако это допущение не вносит существенных погрешностей в окончательные результаты расчета, так как в большинстве случаев фундаменты проектируются с учетом того, чтобы в грунте не появлялись растягивающие напряжения. Если же получаются растягивающие напряжения в грунте, которые в действительности не могут быть, то необходимо изменить размеры фундамента или принять на этом участке $K = 0$ и произвести пересчет.

Таким образом, использование в практических расчетах винклеровой модели основания при правильном выборе коэффициента жесткости вполне обосновано экспериментальными данными. В пользу этой модели говорят также такие обстоятельства:

исключительная простота и наглядность расчетной модели основания;

возможность учета разнообразных расчетных факторов при проектировании сооружений;

относительно невысокая точность параметров, характеризующих деформативные свойства грунтов;

малое влияние неточности, допущенной при определении величины коэффициента жесткости на конечные результаты расчета; например, при изменении K в два раза — значения изгибающих моментов в балке меняются всего на 20%.

Заметим, что в последние годы значительное развитие получила также модель упругого слоя (работы М. И. Горбунова-Посадова, О. Я. Шехтер, К. Е. Егорова и др.), которая при определенных значениях числовых параметров, характеризующих эту модель, дает близкие к винклеровой модели результаты. Однако из-за недостатка экспериментальных данных о величине сжимаемого слоя грунта, работающего под конструкцией, и усложнения расчета эта модель пока не получила широкого использования при определении напряженно-деформированного состояния балок и плит [3].

Определение коэффициента жесткости основания методом пробных нагрузок

При проектировании капитальных сооружений величина коэффициента жесткости устанавливается на основании испытаний грунта штампами в условиях его естественного залегания на месте строительства. Испытание грунтов статическими нагрузками производится в шурфах или скважинах. Шурфы обычно используются при глубине установки штампа, не превышающей 5 м. При необходимости испытания на большей глубине, а также при наличии выше отметки установки штампа водонасыщенных грунтов, затрудняющих проходку шурфов, испытания штампами проводят в буровых скважинах [43].

Чаще всего при испытаниях в шурфах используются стандартные штампы площадью 5000 см². Шурфование является наиболее надежным способом исследования грунтов. Этот метод позволяет устанавливать не только характеристики деформируемости грунтов (модуль деформации, коэффициент постели), но также дает возможность ознакомиться с естественной структурой и влажностью прорезываемых пластов. Для нагружения штампов применяют установки с гидравлическими домкратами или платформами с грузом. Нагружение штампа производят ступенями, размер которых зависит от сжимаемости испытываемых грунтов. Чем более сжимаемым является грунт, тем меньше должна быть величина ступеней нагрузки. Во время испытаний производят измерения осадок грунта под штампом при различных давлениях.

Испытаниям следует подвергать все основные несущие слои грунта. Дело в том, что при помощи штампа можно выяснить только деформативные свойства толщи основания, не превышающей 1,5—2 диаметров или стороны штампа, в то время как размер сжимаемой толщи под фундаментом может быть значительно большим. Если, однако, в пределах сжимаемой толщи (активной зоны) основания будущего сооружения залегает однородный грунт, то достаточно произвести испытания лишь на глубине, примерно соответствующей отметке заложения фундаментов. При неоднородном слоистом основании необходимо испытывать все слои.

Для испытаний грунта в скважинах применяют круглые в плане металлические штампы площадью 600 см^2 (диаметром $27,7 \text{ см}$). Штамп опускают в закрепленную обсадными трубами скважину диаметром 325 мм на трубах диаметром 219 мм . Для нагружения штампа используются те же установки, что при испытаниях в шурфах. Качество подготовки основания при установке штампа в скважине трудно контролируемо, поэтому такие испытания являются менее надежными, чем в шурфах.

В процессе испытаний грунта в шурфах и скважинах ведется журнал, а результаты испытаний оформляются в виде графика,

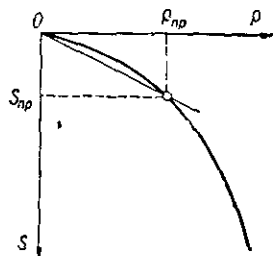


Рис. 3. Характерный график зависимости осадки штампа от удельного давления

выражающего зависимость осадки грунта под штампом от удельного давления. Типичный график напряжения-осадки грунта изображен на рис. 3. Опытные данные показывают, что зависимость осадки штампа от приложенной к нему нагрузки выражается кривой линией, причем угол наклона последней возрастает с увеличением давления. Обычно кривая осадок близка к прямой линии на первых этапах нагружения штампа до некоторой точки, соответствующей давлению $p_{пр}$, которое называют пределом пропорциональной зависимости. Это давление принимается за нормативное давление на грунт.

Начальный участок графика, для которого зависимость между давлением и осадкой достаточно близка к линейной, используется для определения модуля деформаций. При расчете осадок сооружений, а также при определении коэффициентов жесткости он является основной количественной характеристикой грунта. Вычисление модуля деформаций производится по формуле

$$E = (1 - \mu^2) \cdot \frac{N}{Sd}, \quad (2)$$

где N — полная нагрузка на штамп, взятая в конце условного прямолинейного участка на графике;

S — осадка, соответствующая нагрузке N ;

d — диаметр кругового штампа (для квадратного штампа равен диаметру круга равновеликой площади);

μ — коэффициент Пуассона.

Непосредственно по графику может быть вычислен также коэффициент жесткости основания, соответствующий форме и размерам данного штампа. Согласно уравнению (1)

$$K = \frac{p}{S}, \quad (3)$$

где p — среднее удельное давление по подошве штампа, примерно равное ожидаемому среднему давлению в основании проектируемого конкретного сооружения;

S — полная осадка штампа при давлении p .

Таким образом, коэффициент жесткости определяется как котангенс угла наклона прямой, проходящей через начало координат и точку на кривой, соответствующую среднему напряжению под фундаментом сооружения.

Однако было бы ошибкой использовать вычисленное таким образом значение коэффициента жесткости для расчета фундамента сооружения, так как размеры и форма последнего, как правило, не совпадают с таковыми штампа. Многочисленные опыты, проведенные у нас и за рубежом, свидетельствуют, что при одинаковой величине напряжения по подошве штампа осадка будет различной у штампов разных размеров и форм. Поэтому в расчет конструкций на грунтовом основании надлежит вводить значения коэффициента жесткости, учитывающие также названное обстоятельство.

Если бы свойства основания точно отражались соотношением $p = KS$, то в этом случае численное значение коэффициента жесткости не зависело бы от размеров и формы подошвы штампа и фундамента. Таким основанием может служить, например, система не связанных между собой пружин, вода или вертикальные столбики грунта, разделенные абсолютно гладкими вертикальными плоскостями без трения.

Если же грунтовое основание рассматривать как упругое линейно деформируемое полупространство, то коэффициент жесткости такого основания оказывается величиной переменной. Согласно формулам теории упругости осадка штампа, приложенного к поверхности упругого полупространства, равна

$$S = \frac{\omega p \sqrt{F} (1 - \mu^2)}{E}, \quad (4)$$

где ω — коэффициент формы, принимаемый по табл. 1, составленной по данным М. И. Горбунова-Посадова [14];

F — площадь передачи нагрузки.

Пользуясь формулой (4), получим выражение для определения коэффициента жесткости

$$K = \frac{p}{S} = \frac{E}{\omega \sqrt{F} (1 - \mu^2)}. \quad (5)$$

Уравнение (5) показывает, что величина коэффициента жесткости возрастает с уменьшением площади штампа и уменьшается с увеличением последней.

Очевидно, коэффициенты жесткости реального грунта будут находиться в промежутке между двумя крайними значениями, определенными по формулам (3) и (5).

К сожалению, имеющийся опытный материал по изучению зависимости между величиной осадки и размерами загруженной

площади не дает возможности рекомендовать какие-либо численные характеристики таких зависимостей для различных видов грунтовых оснований. Но вместе с тем опыты подтверждают, что в определенных пределах размеров площади загрузки осадка под действием местной нагрузки пропорциональна величине загруженной площади, и, следовательно, коэффициент жесткости будет величиной переменной.

Опыты показывают, что при одинаковых удельных давлениях осадки возрастают пропорционально величине стороны квадрата площади загрузки. Однако такая зависимость имеет место лишь с некоторого определенного для каждого грунта размера штампа — при меньшем размере штампа наблюдается обратная зависимость. При дальнейшем возрастании площади загрузки осадки перестают зависеть от размеров штампа.

Различный характер зависимости осадки от площади малых и средних штампов объясняется различными условиями работы

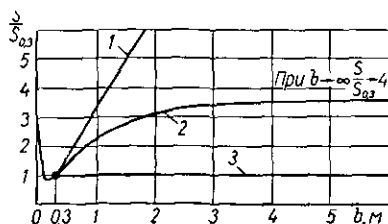


Рис. 4. Зависимость между шириной фундамента и отношением осадок фундамента и штампа при одинаковом удельном давлении:

1 — кривая по теории упругого полупространства; 2 — эмпирическая кривая для песчаных грунтов; 3 — кривая по Винклеровой теории

напряжений от веса грунта и повышение его плотности с увеличением глубины.

Попытки установить предельные размеры штампов, служащие границами отмеченных зависимостей, предпринимались некоторыми исследователями. Так, Б. Д. Васильев предложил принимать следующие ориентировочные границы, за которыми пропадает

Таблица 1
Значения коэффициента ω в формуле (4)

Форма загруженной площади	ω
Круг	0,89
Квадрат	0,88
Прямоугольники при отношении сторон, равном:	
1,5	0,87
2	0,86
3	0,83
4	0,80
5	0,77
6	0,74
7	0,73
8	0,71
9	0,69
10	0,67

грунта в этих двух случаях. При размерах штампов меньше некоторой величины (в опытах Пресса с песком — 30×30 см) осадка происходит, главным образом, не за счет вертикального обжатия грунта, а за счет выпирания грунта из-под штампа. При штампах средних размеров напряжения распределяются на большую глубину, а следовательно, тем большая область массива грунта будет подвержена деформациям. В случае весьма больших штампов-фундаментов на величине осадки начинает сказываться влияние собст-

влияние размера фундамента: для грунтов средней прочности предельная ширина фундамента $b_{пр} = 5$ м и для слабых грунтов $b_{пр} = 10 - 15$ м [12]. Д. Д. Баркан рекомендовал такой границей считать площадь фундамента, равную 10 м^2 , а при меньших площадях коэффициент постели вычислять по формуле (5) [1]. К. Терцаги и Р. Пек для однородных песчаных грунтов предлагают пользоваться приближенной эмпирической формулой

$$S = S_{0,3} \left(\frac{2b}{b + 0,3} \right)^2, \quad (6)$$

где S — осадка проектируемого фундамента, см;

$S_{0,3}$ — осадка штампа размером $0,30 \times 0,30$ м, см, при величине напряжений по подошве, равной среднему давлению под фундаментом;

b — ширина фундамента, м.

При составлении зависимости (6) были использованы данные испытаний пробной нагрузкой искусственно уплотненного песка и относительно однородных слоев песка в естественном состоянии, а также результаты наблюдений над осадкой зданий (рис. 4). Приведенные данные показывают, что с увеличением площади фундамента его осадка увеличивается в меньшей степени, чем следовало бы ожидать на основании расчетов по теории упругого полупространства, и в большей степени (до определенного предела, равного в рассматриваемом случае примерно $b = 5$ м), чем дает теория винклероваго основания.

Значительное влияние на характер развития деформаций грунтов оказывают боковая пригрузка, глубина заложения фундаментов, наличие напластований различной плотности и др. Отсюда следует, что наиболее достоверные результаты могут быть получены при испытаниях опытных фундаментов, площади которых равны или близки по размерам площадям проектируемых фундаментов. Однако такие испытания весьма громоздки и могут осуществляться только в исключительных случаях.

Расчетно-теоретический метод определения коэффициента жесткости основания

Одной из главных предпосылок для повышения степени достоверности расчета конструкций на грунтовом основании является правильный выбор коэффициента жесткости. Поскольку опыты показывают, что величина коэффициента жесткости зависит не только от вида грунта, но и от ряда других факторов, то при его определении необходимо принимать во внимание эти факторы.

Согласно гипотезе Винклера коэффициент жесткости в данной точке i грунта равен отношению давления на грунт в этой точке к ее осадке

$$K_i = \frac{P_i}{S_i}. \quad (7)$$

В соотношении (7) предполагается, что коэффициент жесткости не зависит от величины давления и поэтому его можно определять как котангенс прямой, проходящей через начало координат и точку на кривой давление-осадка, соответствующую среднему давлению по подошве фундамента. Это допущение будет справедливо лишь до тех пор, пока среднее давление, передаваемое фундаментом основанию, не превысит величину нормативного давления для данного вида грунта и фундамента. Но размеры подошвы фундамента именно и подбираются таким образом, чтобы среднее давление на грунт не превышало нормативное, и, следовательно, зависимость (7) с известным приближением отражает действительный характер деформации основания. В противном случае методы расчета осадок грунта, базирующиеся на теории линейно деформируемых тел, применить нельзя, так как появляются области предельного напряженного состояния грунта, и задача определения осадок чрезвычайно усложняется.

Для определения коэффициента жесткости по формуле (7) необходимо знать напряжение p по подошве фундамента и осадку S основания от действия этого напряжения.

Обычно имеются данные о глубине заложения фундаментов и нагрузке на грунт от проектируемого сооружения. Сбор нагрузок, действующих на основание в плоскости подошвы фундамента, производится в соответствии со статической схемой сооружения (расположение несущих стен и колонн, балок и плит перекрытий и др.). Для неразрезных и рамных конструкций сбор нагрузок можно производить без учета неразрезности конструкций и без учета перемещений опор, вызываемых осадками основания [38, п. 5.2]. При определении коэффициента жесткости принимаются нормативные нагрузки. Для упрощения расчетов нормы разрешают определять суммарную нормативную нагрузку на основание по расчетной нагрузке путем деления последней на осредненный коэффициент перегрузки, равный 1,2.

Значение давления под подошвой фундамента, вводимого в расчет осадок, определяется по формуле

$$p = \frac{N}{F} - \gamma_0 h, \quad (8)$$

где N — суммарная нормативная нагрузка, приходящаяся на грунт в плоскости подошвы фундамента;

F — площадь подошвы фундамента;

γ_0 — объемный вес грунта, лежащего выше подошвы фундамента;

h — глубина заложения фундамента.

В этой формуле произведение $\gamma_0 h$ дает величину природного (бытового) давления p_b под подошвой фундамента, т. е. давления от действия собственного веса грунта. Считается, что осадка может происходить только за счет дополнительного (сверх природного)

давления на грунт; при $\frac{N}{F} \leq \gamma_0 h$ осадка отсутствует. Как указывается в справочнике проектировщика [40], такая постановка вопроса не является обоснованной для всех случаев, встречающихся в практике строительства. Полное отсутствие осадок сооружений возможно лишь при условии, что после вскрытия котлована дно его не претерпевает подъема. При небольших размерах котлованов, чаще всего встречающихся в массовом строительстве, подъем дна котлована можно практически пренебречь и расчетное давление определять по формуле (8). Однако для крупных, ответственных сооружений с глубокими и большими по площади котлованами необходимо учитывать подъем дна котлована. В этом случае при вычислении расчетного давления берется не полное природное давление, а только часть его, равная

$$p'_0 = \gamma_0 h \left(1 - \frac{E_1}{E_2}\right), \quad (9)$$

где E_1 — модуль первичного сжатия грунта;

E_2 — модуль вторичного сжатия грунта, всегда больший чем E_1 .

После определения величины среднего давления по подошве фундамента, при выбранных размерах последнего, следует разделить нормативное давление на основание по формуле (10), при наличии в здании подвала — по формуле (11) [38]:

$$R^n = (Ab + Bh) \gamma_0 + Dc^n, \quad (10)$$

$$R^n = \left(Ab + B \frac{2h + h_n}{3} \right) \gamma_0 + Dc^n, \quad (11)$$

где A, B и D — безразмерные коэффициенты, зависящие от нормативного угла внутреннего трения φ^n , принимаемые по табл. 7 СНиП II-Б. 1—62;

b — меньшая сторона прямоугольной подошвы фундамента;

c^n — нормативное удельное сцепление для глинистых грунтов или нормативный параметр линейности для песчаных грунтов, залегающих непосредственно под подошвой фундамента;

h — глубина заложения фундамента от природного уровня грунта или от планировки срезкой подошвы фундамента;

h_n — приведенная глубина заложения фундамента в помещении с подвалом, определяемая по формуле:

где c_1 — толщина слоя грунта выше подошвы фундаментов;
 c_2 — толщина конструкции пола подвала;
 γ_0 — объемный вес грунта, залегающего выше отметки заложения фундамента;

$\gamma_{оп}$ — объемный вес материала конструкции пола подвала.

Формулы (10) и (11) распространяются на все виды грунтов. Их можно применять также при любой форме фундаментов в плане. Для подошвы фундамента в форме круга или правильного многоугольника принимаются значения $b = \sqrt{F}$, где F — площадь подошвы фундамента данной формы. Указанными формулами можно пользоваться и при внецентренном давлении на подошву фундамента, если равнодействующая не выходит за пределы ядра сечения. В противном случае нормативное давление следует определять по фактически нагруженной площади фундамента.

При применении формул (10) и (11) следует иметь в виду, что нормативные давления при условии полного насыщения водой мелких песков принимаются с учетом коэффициента условий работы $m = 0,8$ и для пылеватых песков $m = 0,6$.

Вычисленное нормативное давление на основание сравнивается со средним давлением по подошве фундамента. Если условие

$$p'_{ср} = \frac{N}{F} \leq R^n \quad (12)$$

соблюдается, то размеры фундамента выбраны правильно, и для определения осадок можно применять существующие методы, основанные на теории линейно деформируемой среды. Если $p'_{ср} > R^n$, то в этом случае необходимо увеличить размеры фундамента с таким расчетом, чтобы среднее давление на грунт основания не превышало R^n .

После определения размеров фундамента и давления под его подошвой вычисляются осадки основания. Для расчета осадок необходимо иметь геологическое строение площадки строительства с указанием толщины отдельных пластов грунта, уровня грунтовых вод и физико-механических свойств грунтов на достаточную глубину ниже отметки заложения подошвы фундаментов.

Подсчет осадок может быть выполнен любым методом, которым располагает механика грунтов. Главное, чтобы этот метод подтверждался результатами натурных наблюдений за действительными осадками сооружений.

Нормы рекомендуют для практического пользования весьма простой по технике вычислений метод послойного элементарного суммирования (метод ВИОС). Он основан на определении вертикальных деформаций отдельных элементов, выделяемых в виде вертикальных призм грунта. Высота призм принимается от уровня подошвы фундамента до глубины z , на которой вертикальные напряжения от равномерно распределенной внешней нагрузки со-

ставляют 20% от природного давления на грунт. Вся сжимаемая толща грунта разбивается на элементарные слои, и для каждого слоя определяется сжимающее напряжение p_z по теории линейно деформируемой среды, в которой напряжения и деформации связаны законом Гука. Далее вычисляется осадка всей сжатой зоны грунта как сумма осадок отдельных выделенных элементов по формуле

$$S = \sum_{j=1}^n p_{zj} h_j \frac{\beta}{E_j}, \quad (13)$$

где n — число слоев, на которые разбита сжимаемая толща основания;

p_{zj} — среднее сжимающее напряжение в j -ом слое грунта;

h_j — толщина j -го слоя;

E_j — модуль деформации j -го слоя;

β — безразмерный коэффициент, корректирующий упрощенную схему расчета, принимаемый равным 0,8 для всех видов грунтов.

При пользовании указанным методом определения осадок грунта представляется возможным учесть размеры и форму подошвы фундамента, влияние соседних фундаментов и пригрузок на осадку любой точки i подошвы рассматриваемого фундамента, а также учесть фактическую неоднородность и слоистость грунта по глубине и в горизонтальном направлении. Для облегчения расчетов рядом авторов составлены графики и таблицы числовых значений функций, определяющих изменения сжимающих напряжений по глубине в зависимости от размеров и формы фундамента, вида нагрузки и расстояния рассматриваемой точки от центра загруженной площадки [40].

Таким образом, определив по формуле (13) или поливой обобщенной формуле осадки S_i поверхности основания по характерным вертикалям геологического разреза, можно получить искомые значения коэффициента жесткости. Для этого согласно формуле (7) величина среднего расчетного давления p_i в точке i фундамента делится на осадку S_i этой точки.

При таком подходе к определению коэффициента жесткости достигается лучшее приближение к действительности, чем при старом классическом методе его определения, как характеристике только физических свойств грунта. Для конкретного грунтового основания коэффициент жесткости — величина переменная, отражающая деформативность основания (постели) только под конкретным фундаментом. В зависимости от грунтовых условий коэффициент жесткости в пределах контура сооружения может быть величиной постоянной или переменной.

При наличии пригрузки, вызванной строительством по соседству с рассчитываемым сооружением другого сооружения или

какой-либо иной причиной, осадки близко расположенных участков основания первого сооружения увеличиваются. Пользуясь методом угловых точек, нетрудно вычислить дополнительное увеличение осадок от влияния соседних фундаментов или пригрузок [40, 45]. Следовательно, на таких участках коэффициент жесткости при прочих равных условиях будет иметь меньшие значения по сравнению с другими участками рассматриваемого фундамента.

Особое внимание при определении осадок следует обращать на гидрогеологические условия площадки строительства. Так, например, для песчаных грунтов значительное влияние на осадку

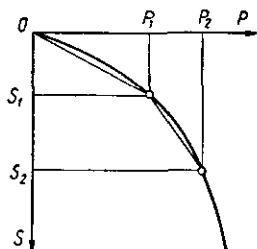


Рис. 5. Учет нелинейной зависимости осадок основания от давлений.

оказывает положение уровня воды относительно подошвы фундамента. Если уровень воды находился ниже активной зоны, а затем стал подниматься кверху, то устойчивость основания против выпирания уменьшается, а осадка увеличивается [41]. Значит в этом случае необходимо учитывать возможное снижение коэффициента жесткости.

Следовательно, пользуясь расчетно-теоретическим методом определения коэффициента жесткости, можно сравнительно просто и на общей основе учитывать влияние

на работу сооружения самых разнообразных факторов, по которым существуют более или менее достоверные решения механики грунтов.

Приведем несколько примеров.

1. Пусть требуется определить перемещения (изгиб) сооружения и возникающие в связи с этим напряжения в его элементах в момент времени t при постепенном нарастании осадки. Для этого необходимо определить осадки основания, соответствующие данному времени t , а затем по формуле (7) вычислить значения коэффициентов жесткости, которые в свою очередь служат исходными данными для расчета сооружения.

2. Необходимо учесть нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями грунта при расчете сооружения. График напряжение — осадка приведен на рис. 5. В этом случае расчет сооружения производят дважды (или, при необходимости, большее число раз). Вначале сооружение рассчитывают на нагрузку, вызывающую давление p_1 на основание, при коэффициенте жесткости

$K_1 = \frac{P_1}{S_1}$. Затем его рассчитывают на нагрузку, создающую

давление $p_2 - p_1$, при коэффициенте жесткости $K_2 = \frac{P_2 - P_1}{S_2 - S_1}$. Полученные усилия и деформации суммируют.

3. Вычислим коэффициент жесткости основания по опытным данным, приведенным в работе Е. К. Массальского [30]. Основа-

нием является сухой мелкозернистый песок, модуль деформации которого $E = 330 \text{ кг/см}^2$. На поверхности основания лежит стальная балка с размерами подошвы $b \times l = 10 \times 120 \text{ см}$.

Основание однородное в плане и по глубине, поэтому для определения коэффициента жесткости можно воспользоваться формулой (5)

$$K = \frac{330}{0,65 \sqrt{10 \cdot 120} (1 - 0,28^2)} = 16,0 \text{ кг/см}^2.$$

Погонный коэффициент жесткости $K_n = Kb = 16 \cdot 10 = 160 \text{ кг/см}^2$ постоянен по длине балки.

Вычисленные теоретически при $K = 160 \text{ кг/см}^2$ значения осадок балки и изгибающих моментов при различных видах загрузжений дают хорошее совпадение с опытными данными [30].

Количество примеров можно продолжить, однако, и приведенных достаточно, чтобы понять преимущества рассмотренного метода по сравнению с методом определения коэффициента жесткости как характеристики только данного вида грунта.

В заключение отметим, что точность определения коэффициента жесткости в очень большой степени зависит от полноты и качества инженерно-геологических изысканий строительной площадки.

Табличный метод определения коэффициента жесткости

Для предварительных расчетов в случае однородных по горизонтали и глубине оснований величины K иногда принимаются по таблицам.

В таблице, составленной Э. Ф. Корневицем и Г. В. Эндером в 1932 г. [25], приводятся ориентировочные данные о величинах коэффициентов жесткости. Они были заимствованы в основном из иностранных литературных источников и частично из результатов опытных испытаний грунтов на некоторых стройках в СССР. Эти данные до настоящего времени фигурируют в нашей технической литературе, посвященной расчету балок и плит на винклеровом основании [24, 44].

В 1965 г. Э. С. Бартошевичем была составлена новая таблица значений коэффициентов жесткости различных категорий грунта, предназначенная для использования при расчете конструкций промышленного и гражданского строительства на статическую нагрузку [3]. В таблице использованы данные полевых испытаний грунтов пробными нагрузками в шурфах глубиной до 1,5 м. Испытывались грунты всех климатических зон СССР. Числовые значения K даны в зависимости от плотности и влажности грунта, а также от значения наибольшего эксплуатационного прогиба конструкции. Если при расчете окажется, что вычисленный прогиб существенно отличается от принятого ориентировочно, следует

повторить расчет, приняв новое значение коэффициента жесткости в соответствии с величиной прогиба, полученной в результате первоначального расчета [3].

Следует отметить, что во всех существующих таблицах коэффициент жесткости рассматривается как постоянная характеристика упругих свойств данного вида и состояния грунта. В действительности это величина переменная, и ее следует определять с учетом конкретных геометрических и деформационных параметров сооружения и основания. Мы считаем, что более правильным является при предварительных расчетах использование для определения коэффициента жесткости основания формулы (5), где модуль деформации грунта E принимается по табл. 13 СНиП II-Б. 1—62.

Коэффициенты жесткости при повороте и сдвиге фундамента

Рассмотрим перемещения жесткого прямоугольного фундамента, к которому приложены действующие статически следующие нагрузки: 1) вертикальная сосредоточенная сила N_z , приложенная в центре фундамента; 2) момент M_x , действующий в вертикальной плоскости, параллельной стороне a прямоугольника и 3) горизонтальная сосредоточенная сила N_x , приложенная в центре фундамента в плоскости подошвы последнего (рис. 6). Пользуясь принципом независи-

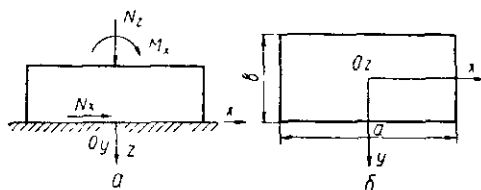


Рис. 6. Жесткий прямоугольный фундамент:

a — вид сбоку, b — план фундамента

мости действия сил, представим перемещения фундамента раздельно от каждого вида нагрузок, как показано на рис. 7.

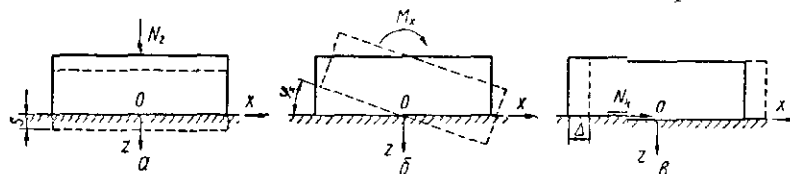


Рис. 7. Перемещения фундамента при различных случаях загрузки:

a — вертикальной силой; $б$ — моментом; $в$ — горизонтальной силой

Для определения S , φ и Δ воспользуемся формулами величин осредненных перемещений гибкого штампа, полученными при действии соответствующих распределенных нагрузок на поверхность основания. Как известно, эти величины весьма близки к величинам перемещений жесткого штампа. Так, например, различие в средней

осадке абсолютно гибкой плиты, загруженной сплошной равномерно распределенной нагрузкой, и абсолютно жесткой плиты, загруженной такой же нагрузкой или сосредоточенной центрально расположенной силой, при одинаковых размерах плит составляет около 6%. Поэтому обычно расчет осадки жесткого фундамента заменяют более простым расчетом средней его осадки без учета жесткости.

Рассчитанные таким образом средние осадки более близки к опытным данным, чем по теории абсолютно жесткого штампа [1, стр. 37; 14, стр. 440].

Формулы перемещений фундамента имеют следующий вид [37]:

$$S = \frac{N_z \sqrt{F} (1 - \mu^2)}{\omega_z E F}; \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M \sqrt{F} (1 - \mu^2)}{\omega_\varphi E I}; \quad (15)$$

$$\Delta = \frac{N_x \sqrt{F} (1 + \mu) (1 - \mu \omega_x)}{\omega_x E F}, \quad (16)$$

где E — модуль деформаций;
 μ — коэффициент Пуассона грунта;
 F — площадь подошвы фундамента;
 I — момент инерции этой площади относительно оси y (см. рис. 6, б);
 $\omega_z, \omega_\varphi, \omega_x$ — безразмерные коэффициенты, определяемые в зависимости от соотношения сторон подошвы фундамента $\frac{a}{b}$ по табл. 2.

Используя главную предпосылку вишклеровой модели основания о пропорциональности давлений и перемещений, составим выражения для коэффициентов жесткости от действия каждой из указанных нагрузок.

При действии на фундамент центральной силы N_z давление на основание считается равномерно распределенным и, согласно уравнению (7), будем иметь

$$K_z = \frac{N_z}{FS}, \quad (17)$$

где K — коэффициент жесткости, найденный при равномерном сжатии основания.

Таблица 2
Значения коэффициентов $\omega_z, \omega_\varphi, \omega_x$

$\frac{a}{b}$	ω_z	ω_φ	ω_x
0,2	1,22	1,62	0,53
0,33	1,13	1,65	0,53
0,5	1,09	1,72	0,54
0,66	1,07	1,80	0,53
1	1,06	1,98	0,50
1,5	1,07	2,24	0,45
2	1,09	2,50	0,42
3	1,13	2,97	0,37
5	1,22	3,59	0,29

Подставляя в это выражение значение осадки S по формуле (14), получим

$$K_z = \frac{\omega_z E}{\sqrt{F} (1 - \mu^2)}. \quad (18)$$

Если на фундамент действует момент M , то давления и осадки изменяются по линейному закону (рис. 8). В этом случае коэффициент жесткости можно определить из соотношения

$$K_\Phi = \frac{p_{\max}}{z_{\max}},$$

где K_Φ — коэффициент жесткости, определенный при неравномерном сжатии основания;

p_{\max} — давление в крайней точке подошвы фундамента;

z_{\max} — осадка основания в той же точке.

Давление p_{\max} определяем по известной из сопротивления материалов общей формуле нормального напряжения при изгибе

$$\sigma = \frac{M}{I} x.$$

В нашем случае $x = \frac{a}{2}$ и, следовательно,

$$p_{\max} = \frac{Ma}{2I}.$$

Осадка z_{\max} , выраженная через угол поворота фундамента и его длину, имеет вид

$$z_{\max} = \frac{a \operatorname{tg} \varphi}{2}.$$

Подставляя значения p_{\max} и z_{\max} в формулу для K_Φ , получим

$$K_\Phi = \frac{M}{I \operatorname{tg} \varphi}. \quad (19)$$

Или, если $\operatorname{tg} \varphi$ выразить по формуле (15),

$$K_\Phi = \frac{\omega_\Phi E}{\sqrt{F} (1 - \mu^2)}. \quad (20)$$

Под действием горизонтальной силы, приложенной на уровне подошвы фундамента, последний перемещается по направлению действия силы на величину Δ . Сдвиг фундамента принципиально ничем не отличается от осадки, что было подтверждено соответствующими опытами [1]. Поэтому принимается, что связь между сдвигом фундамента и средним напряжением сдвига p_x , развивающимся по подошве фундамента, линейна, т. е.

$$\frac{N_x}{F} = p_x = K_x \Delta, \quad (21)$$

откуда

$$K_x = \frac{N_x}{F\Delta} = \frac{\omega_z E}{V\bar{F}(1 - \mu\omega_x)(1 + \mu)}. \quad (22)$$

Здесь K_x обозначает коэффициент жесткости при сдвиге фундамента.

Сравнивая формулы (18), (20) и (22) и учитывая цифровые данные табл. 2, нетрудно увидеть, что коэффициенты жесткости при равномерном и неравномерном сжатии и при сдвиге не равны между собой. Следовательно, коэффициент жесткости зависит не только от деформативных свойств грунта, размеров фундамента, но также и от характера нагрузки, передающейся на основание.

Сопоставляя формулы (18) и (20), получим соотношение между коэффициентами жесткости K_z и K_ϕ , равное

$$\frac{K_z}{K_\phi} = \frac{\omega_z}{\omega_\phi}. \quad (23)$$

Соотношение (23) позволяет ограничить экспериментальные исследования коэффициентов жесткости только определением, например, K_z . Коэффициент K_ϕ находится путем вычисления по формуле (23).

Опытная проверка соотношения (23) подтвердила его правильность и достаточную для практических целей точность [1].

Однако до настоящего времени при статических расчетах конструкций, лежащих на упругом винклеровом основании, пользуются лишь одним коэффициентом жесткости, определяемым при равномерном сжатии грунта, т. е. считается, что $K_z = K_\phi$. При расчете балок и плит конечной жесткости принятие одинаковых коэффициентов жесткости при равномерном и неравномерном сжатии не вносит существенных погрешностей в конечные результаты расчета. Но при определении перемещений абсолютно жестких фундаментов следует учитывать их различие.

В дальнейшем условимся, что под термином «коэффициент жесткости» везде, где это специально не оговорено, будет подразумеваться коэффициент жесткости, определяемый при равномерном сжатии грунта.

Отметим, что при расчете фундаментов под машины на колебания учитываются все три коэффициента жесткости. В этом случае вместо модуля общей деформации грунта, включающего также остаточные деформации, используется модуль упругости, харак-

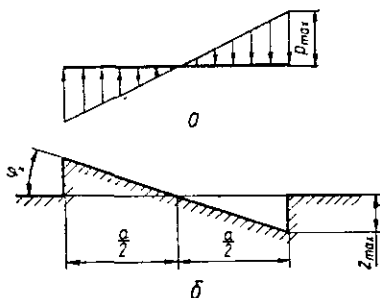


Рис. 8. К определению коэффициента жесткости при повороте фундамента:

a — эпюра давлений на основание, b — перемещение поверхности основания.

теризующий чисто упругую деформацию грунта [1, 37]. Поэтому в теории расчета фундаментов на колебания коэффициент K_z называется коэффициентом упругого равномерного сжатия, K_ϕ — упругого неравномерного сжатия и K_x — упругого равномерного сдвига основания. Они определяются по тем же формулам, так как приведенные решения не изменяются, если вместо модуля деформаций принять модуль упругости грунта и наоборот. Коэффициенты упругого сжатия и сдвига отличаются от соответствующих коэффициентов жесткости при сжатии и сдвиге тем, что первые связывают лишь упругую часть полной осадки с давлением, а вторые — полную осадку с давлением. Поскольку полная осадка основания всегда больше упругой ее части, то для всех без исключения грунтов $K_{\text{упр}} > K_{\text{полн}}$.

Действующие технические условия проектирования фундаментов под машины с динамическими нагрузками (СН 18—58) рекомендуют пользоваться формулами (18), (20) и (22) только при значениях площади подошвы фундамента $F \leq 10 \text{ м}^2$, а при $F > 10 \text{ м}^2$ принимать значения K_z , K_ϕ и K_x постоянными, соответствующими $F = 10 \text{ м}^2$. При этом независимо от соотношения размеров подошвы фундамента величины K_ϕ и K_x допускается принимать равными

$$K_\phi = 2K_z; \quad K_x = 0,7K_z.$$

Коэффициенты жесткости свайных оснований

Свайные фундаменты широко применяются в практике строительства различных сооружений на слабых грунтах. В последние годы свайные фундаменты стали применять в массовом жилищном и отчасти промышленном строительстве и в благоприятных грунтовых условиях — взамен обычных фундаментов. В последнем случае используются так называемые короткие сваи (длиной до 7 м).

При одинаковых грунтовых условиях свайные фундаменты дают, как правило, меньшие осадки по сравнению с обычными фундаментами. Эта особенность свайных фундаментов важна для сооружений, чувствительных к неравномерным осадкам.

Сваи в фундаменте могут располагаться в виде свайного куста, свайного поля или свайных полос. К свайным кустам обычно относятся свайные фундаменты колонн и отдельных высоких сооружений; к свайным полям — фундаменты мостовых опор, гидротехнических сооружений и др. Различие между кустом и полем заключается только в количестве свай; в кустах свай меньше, чем в свайном поле. Соотношение размеров свайных кустов и полей в плане не должно превышать 5. В противном случае фундамент считается свайной полосой. Примерами свайных полос могут служить свайные фундаменты стен гражданских и промышленных зданий, набережных и др.

Конструктивно сваи объединяют поверху плитным или балочным ростверком, который служит для взаимной связи свай между собой и выравнивания их осадок. Различают ростверки высокие и низкие. В высоком ростверке его подошва лежит выше поверхности грунта, в низком — ниже уровня земли. Для промышленных и гражданских сооружений чаще всего применяются низкие ростверки; высокие ростверки используются в тех случаях, когда местность покрыта водой (строительство набережных, мостовых опор и др.).

По характеру статической работы в грунте сваи разделяются на сваи-стойки, передающие вертикальную сжимающую нагрузку от сооружения только нижними концами, и висячие сваи, передающие часть нагрузки грунту своей боковой поверхностью и частью нагрузки нижними концами.

Под влиянием нагрузки свайные основания деформируются; причем имеется много сходства в характере проявления осадок свайных оснований и осадок фундаментов на естественном основании. Поэтому совершенно неправильно мнение, что сооружения на сваях не получают осадок. Осадки всегда будут иметь место. В одних случаях, например, при сваях-стойках, опирающихся на прочные грунты (скальные и крупнообломочные), осадки будут невелики, в других — могут достигать значительных величин. Известны примеры, когда осадки фундаментов из висячих свай достигали 15—20 см и более.

Конструкции на свайных основаниях рассчитываются таким же образом, как конструкции на естественных основаниях. Разница заключается лишь в способе определения коэффициента жесткости основания.

Чтобы установить значение коэффициента жесткости свайного основания, необходимо вначале определить коэффициент жесткости (или жесткость) отдельной сваи, а затем разделить этот коэффициент на среднюю площадь участка ростверка, приходящуюся на одну сваю. Средняя площадь участка находится путем деления площади всего ростверка на число свай в нем.

Коэффициент жесткости K' отдельной сваи определяется по формуле

$$K' = \frac{N}{S}, \quad (24)$$

где N — нормативная нагрузка на сваю;

S — осадка сваи при этой нагрузке.

Определение осадок свайных оснований из-за недостаточной изученности вопроса обычно встречает значительные затруднения. Поэтому применяются различные приближенные приемы, степень точности которых весьма условна.

Осадку свайного основания может быть оценена по данным испытания одиночных свай статической нагрузкой, как это делается

при испытании грунтов штампами. По полученным опытным данным строят график зависимости осадки сваи от нагрузки. Этот график используется для определения величины осадки при действии нормативной нагрузки от сооружения и вычисления коэффициента жесткости сваи по формуле (24). Большим достоинством метода испытания свай пробными нагрузками является возможность изучения работы свай в конкретных грунтовых условиях. Однако полностью полагаться на результаты испытания

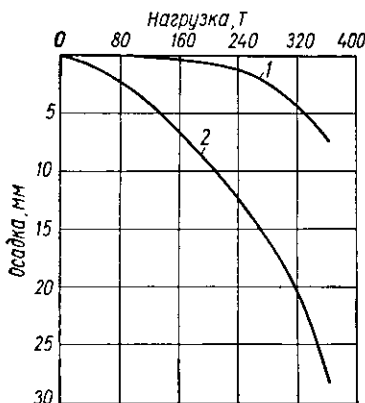


Рис. 9. График осадки сваи:
1 — перемещение острия сваи; 2 — перемещение головы сваи.

нельзя, так как вследствие неоднородности грунтовой среды сваи под сооружением могут оказаться в иных грунтовых условиях, чем опытная свая.

Осадку сваи может быть вычислена также расчетным путем на основании данных инженерно-геологических изысканий.

Здесь следует заметить, что если достоверный прогноз осадок фундаментов на естественных основаниях представляет довольно сложную задачу, то для свайных фундаментов расчет осадок дополнительно усложняется за счет самой технологии производства работ и неизбежных колебаний свойств грунтов в зонах нижних концов свай в пределах одного фундамента. Даже при однородном грунте осадки свай, забитых на одну и ту же глубину, колеблются в широких пределах в зависимости от степени добивки молотом. Эти факторы невозможно оценить с помощью теоретических расчетов.

В общем случае осадка сваи складывается из величины обжатия ствола сваи действующей нагрузкой и обжатия грунта основания (рис. 9). Данные о перемещениях головы и острия сваи получены в процессе испытаний статической нагрузкой сваи диаметром 30 см и длиной 20,6 м [31]. Из графика видно, что рассматриваемая свая под действием нагрузки переместилась почти на 3 см в основном за счет укорочения ствола сваи.

В случае свай-стоек, т. е. когда конец сваи считается неподвижным, осадку можно определять только в зависимости от деформации материала сваи без учета сопротивления грунта по ее боковой поверхности. Соответствующая формула имеет вид

$$S = \frac{NL}{EF}, \quad (25)$$

где N — сосредоточенная сила, действующая на сваю;

E — модуль упругости материала свай при сжатии;

F — площадь поперечного сечения ствола свай;

L — расчетная длина ствола свай.

Подставляя полученное значение осадки в формулу (24), будем иметь

$$K' = \frac{EF}{L}. \quad (26)$$

В случае висячих свай осадка одиночно работающей сваи определяется с учетом сопротивления сил трения по ее боковой поверхности в грунте по формуле [27]:

$$S = \frac{L}{EF} \left(N - \frac{TL}{4} \right). \quad (27)$$

Здесь T — сопротивление сил трения на 1 м длины ствола свай на глубине L (рис. 10), вычисляемое по формуле

$$T = Vf^n,$$

где V — периметр поперечного сечения ствола свай;

f^n — нормативное предельное сопротивление силы трения грунта по стволу, $т/м^2$, на глубине L , принимаемое по табл. 11.6 справочника [40] или материалам натуральных испытаний.

При выводе формулы (27) принято изменение сил трения вдоль ствола свай по параболе (рис. 10), что в общем подтверждается материалами полевых испытаний. Для грунтов с различными характеристиками расчеты величин перемещений свай производятся по формуле (27) для каждого слоя в отдельности.

Результаты испытаний различных висячих свай по материалам отечественной и зарубежной практики показывают, что осадки одиночно работающих висячих свай мало зависят от вида грунтов. Абсолютные величины осадок одиночных свай, как правило, невелики. Проведенная во ВНИИ транспортного строительства обработка материала 1260 статических испытаний свай, погруженных на разные глубины в разные грунты, полностью подтверждает сказанное. Систематизация указанных материалов испытаний позволила составить обобщенные графики зависимости осадок свай от глубины забивки и действующей нагрузки [27]. Пользуясь этими графиками, проектировщик, назначив размеры свай, материал, глубину забивки в грунт и зная действующие нагрузки, сможет определить максимальные величины осадок одиночных висячих свай.

Что касается осадок оснований, состоящих из свайного куста, поля или полосы, то в этом случае при определении осадок необ-

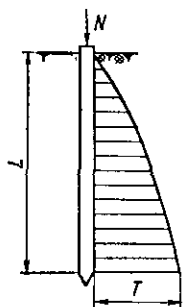


Рис. 10. Расчетная схема висячей свай.

ходимо учитывать так называемый кустовой эффект. Дело в том, что работа отдельных висячих свай, входящих в состав свайного основания, отличается от работы одиночных свай, находящихся в аналогичных грунтовых условиях. При частом расположении свай активные зоны каждой из них совмещаются, и вследствие этого осадка каждой сваи возрастает.

Осадка свайного фундамента из висячих свай может приниматься равной осадке одиночной сваи только при соблюдении одного из следующих условий (СНиП II-Б. 5—62):

1) расстояние между осями свай в плоскости нижних концов равно или более $6d$, где d — диаметр круглого или сторона квадратного, либо большая сторона прямоугольного поперечного сечения сваи;

2) число свай в фундаменте не более 4;

3) число продольных рядов свай не более 3, а отношение сторон ростверка в плане более 5.

Во всех остальных случаях расчет осадок свайных фундаментов из висячих свай производится аналогично расчету осадок обычного фундамента. При этом условно считают, что сваи вместе с окружающим грунтом образуют массив, контуры которого определяются: сверху — поверхностью планировки грунта; с боков — вертикальными плоскостями; снизу — плоскостью в уровне нижних концов свай в границах, определяемых пересечением с этой плоскостью наклонных под углом $\frac{\varphi^{cp}}{4}$ к вертикали линий, проведенных от паружного контура свайного куста в уровне подошвы ростверка. Здесь φ^{cp} — средневзвешенное нормативное значение угла внутреннего трения грунта, окружающего сваи. На действие нагрузки от условного массива грунта и сооружения ведут расчет осадки основания, расположенного под плоскостью нижних концов свай.

Необходимо отметить, что данные натурных наблюдений и экспериментальных исследований не подтверждают рекомендации норм проектирования свайных фундаментов в части определения осадок свайных полос (см. приведенное выше третье условие). Опыты показали, что даже при однорядном расположении свай, принимаемом при строительстве крупнопанельных жилых зданий, осадка свайного фундамента оказывается в 5—10 раз больше осадки одиночной сваи, испытанной пробной статической нагрузкой в тех же грунтовых условиях [2].

Для свай-стоек, когда несущий слой грунта может считаться практически несжимаемым, величина осадки свайного фундамента принимается равной осадке одиночной сваи.

Коэффициент жесткости сваи при воздействии горизонтальной нагрузки определяется по формуле

$$K'_r = \frac{H}{\Delta}, \quad (28)$$

где H — горизонтальная сосредоточенная сила, приложенная к голове сваи;

Δ — горизонтальное перемещение сваи от силы H .

Коэффициент жесткости всего свайного основания (куста, поля или полосы) принимается равным коэффициенту жесткости одной сваи, т. е. в этом случае влияние кустового эффекта не учитывается. Это положение подтверждено результатами испытаний кустов из деревянных и железобетонных свай на горизонтальные нагрузки.

Зависимость перемещения свай от действия горизонтальной нагрузки следует определять на основании полевых испытаний свай на горизонтальную нагрузку.

При отсутствии экспериментальных данных может быть использован следующий приближенный способ определения горизонтального перемещения головы сваи.

Предполагается, что свая длиной l жестко заделана в грунте на глубине большей некоторой величины l_0 (рис. 11). Глубина заделки сваи в грунт принимается от 4,5 до 8 d , согласно табл. 3, где d — диаметр круглого или сторона квад-

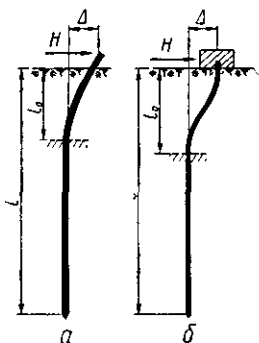


Рис. 11. Изгиб свай горизонтальной нагрузкой: а — свая со свободной головой; б — свая с головой, заделанной в ростверк.

Расчетные длины свай

Таблица 3

Вид грунтов, залегающих от подошвы ростверка до глубины l_0	Расчетная глубина заделки свай в грунт			
	при защемленной голове		при свободной голове	
	деревянных	железобетонных	деревянных	железобетонных
Пески средней плотности, суглинки и глины тугопластичные	4,5 d	6 d	3 d	4 d
Пески рыхлые и пылеватые, супеси пластичные, суглинки и глины мягкопластичные	5 d	7 d	3,5 d	5 d
Илы, суглинки и глины текучепластичные	6 d	8 d	4 d	5,5 d

ратного поперечного сечения свай. Пренебрегая реакцией грунта на деформацию сваи на участке l_0 , определяем прогиб верха сваи как обычной однопролетной консольной балки с сосредоточенной силой H . Для сваи со свободной головой (рис. 11, а)

$$\Delta = \frac{Hl_0^3}{3EI} \quad (29)$$

При голове сваи, заделанной в ростверк (рис. 11, б),

$$\Delta = \frac{H_0^3}{12EI}, \quad (30)$$

где E — модуль упругости материала сваи;

I — момент инерции поперечного сечения сваи.

Произведение EI представляет собой изгибную жесткость поперечного сечения сваи; для железобетонных свай, в которых появление трещин не допускается, жесткость их принимается равной $0,85EI$, а для свай, в которых появление трещин допускается, жесткость их определяется по указаниям раздела 9 гл. СНиП II-B. 1—62.

ИЗГИБ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Методы расчета

Многие инженерные конструкции, лежащие на грунте, можно рассматривать при их расчете как балки на упругом основании. Например, ленточные фундаменты, фундаменты подкрановых путей, доки, балочные плиты, бескаркасные жилые и гражданские здания и другие сооружения промышленного, гражданского, гидротехнического и дорожного строительства рассчитываются как балки, лежащие на упругом основании.

Теория расчета балок на упругом основании хорошо разработана в трудах советских и зарубежных авторов применительно к балке постоянного сечения, лежащей на упругом основании с постоянным коэффициентом жесткости. Однако общий, практически наиболее важный случай основания переменной жесткости исследован недостаточно; большинство из имеющихся методов расчета балок на упругом основании с переменным коэффициентом жесткости хотя и имеют теоретическую ценность, но для практического применения мало пригодны.

Имея в виду дать практическое и вместе с тем общее решение задачи расчета балки на упругом основании произвольной жесткости, ниже используем в основном, решение по методу начальных параметров в форме, изложенной в наших работах [21, 22]. Этот метод весьма прост, исключительно нагляден и дает возможность получать решения с любой точностью.

Кроме того, приведена методика расчета балок методом конечных разностей, которая в отдельных случаях целесообразна для использования в практике.

Рассмотрим вначале основы решения по методу начальных параметров.

Пусть на поверхности упругого основания переменной жесткости лежит балка, несущая произвольную внешнюю нагрузку $g(x)$, N , M (рис. 12, а). Со стороны основания возникают реактивные давления, нахождение которых составляет суть расчета балки на упругом основании. При помощи найденных реакций основания значения изгибающих моментов и поперечных сил в любом сечении балки вычисляются элементарным путем, так как все воздействия, приложенные к балке, известны.

Для определения неизвестных реакций составляется ряд уравнений, выражающих совместность деформаций балки и поверхности основания, на котором покоится эта балка. Уравнения составляются применительно к отдельным сечениям, заранее выбранным по длине балки. Для упрощения выражений коэффициентов при неизвестных вся длина балки делится обычно на n равных участков;

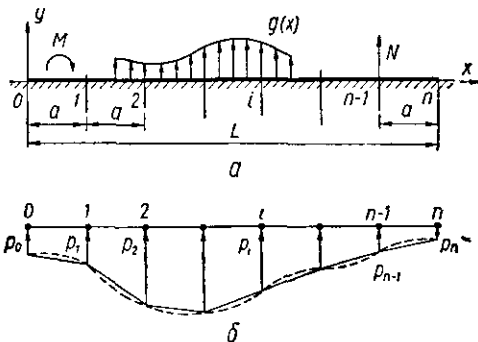


Рис. 12. Расчетная схема балки в методе начальных параметров:

a — схема балки и нагрузок (положительное направление); b — эпюра реактивных давлений (— действительная, — расчетная).

известных реактивных давлений $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ (рис. 12, б) и известной внешней нагрузки $g(x), N, M$.

Прогиб любого сечения i балки, выраженный через начальные параметры и воздействия, приложенные к ней, можно представить в виде

$$y_i = y_0 + y_i(\theta_0) + y_i(M_0) + y_i(Q_0) + y_i(p) + y_i(g, N, M), \quad (32)$$

где начальными параметрами являются прогиб y_0 левого конца балки, угол поворота θ_0 того же конца, начальный изгибающий момент M_0 и начальная перерезывающая сила Q_0 . Прогибы от реактивных давлений основания обозначены через $y_i(p)$, а от внешней нагрузки, которая может состоять из распределенной нагрузки g , сосредоточенных сил N и изгибающих моментов M — $y_i(g, N, M)$.

При свободном от сосредоточенных закреплений конце балки имеем $M_0 = 0, Q_0 = 0$; при шарнирно-опертом $y_0 = 0, M_0 = 0$; при защемленном $y_0 = 0, \theta_0 = 0$.

Приведенная балка имеет свободные концы, где M и Q отсутствуют, поэтому для нее уравнение (32) примет следующий вид:

$$y_i = y_0 + y_i(\theta_0) + y_i(p) + y_i(g, N, M). \quad (33)$$

При выводе формул прогибов от реактивных давлений основания $y_i(p)$ в общем случае криволинейная эпюра реакций заме-

ков; сечения нумеруются, $0, 1, 2, \dots, n$, начиная с левого конца балки.

Для каждого сечения можно записать уравнение

$$y_i = \delta_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (34)$$

где y_i — прогиб (вертикальное перемещение) балки в точке i ;

δ_i — осадка поверхности основания в точке i .

Здесь y_i и δ_i необходимо выразить в функции не-

няется кусочно-линейной с переломами в точках 0, 1, 2, ..., n (рис. 12, б).

Готовые формулы прогибов и углов поворота для основных видов нагрузок представлены в табл. 4. В этих формулах учтено влияние деформаций сдвига на прогибы, что может понадобиться при расчете составных балок, обладающих относительно небольшой сдвиговой жесткостью, и при определении реакций основания для балок-стенок.

Под изгибной EI и сдвиговой GF жесткостями подразумеваются в общем случае обобщенные жесткостные характеристики сечений, определяемые в каждом конкретном случае с учетом возможности или маловероятности появления трещины в растянутой зоне бетона, податливости сопряжений и др. В частности, при сплошных балках коэффициент формы поперечного сечения ν , фигурирующий в формуле относительного сдвига, считается учтенным в сдвиговой жесткости GF , т. е.

$$GF = \frac{\overline{GF}}{\nu}, \quad (34)$$

где \overline{GF} — произведение модуля сдвига материала балки на площадь поперечного сечения.

Поскольку на отдельных участках балки эпюра реакций имеет вид трапеций, то, поделив каждую такую трапецию на два треугольника и пользуясь соответствующими формулами табл. 4, можно составить выражения для прогибов сечений 1, 2, 3, ..., n .

Осадки поверхности основания согласно (7) равны

$$\delta_i = -\frac{p_i}{K_i} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n), \quad (35)$$

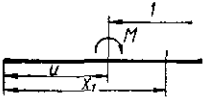
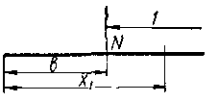
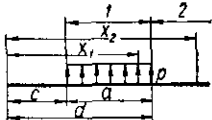
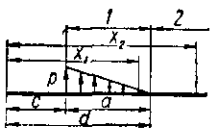
где K_i является погонным коэффициентом жесткости, т. е. умноженным на ширину балки, а знак минус показывает, что положительному направлению реакций основания соответствует противоположное направление его осадки.

В результате получаем следующую систему уравнений совместности деформаций [22]:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= -\frac{p_0}{K_0}; \\ y_0 + \theta_0 a + \frac{a^4}{120EI} (4p_0 + p_1) - \frac{a^2}{6GF} (2p_0 + p_1) + y_{1в} &= -\frac{p_1}{K_1}; \\ y_0 + \theta_0 2a + \frac{a^4}{120EI} (49p_0 + 30p_1 + p_2) - \frac{a^2}{6GF} (5p_0 + 6p_1 + p_2) + \\ &\quad + y_{2в} = -\frac{p_2}{K_2} \\ &\text{и т. д.,} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где $y_{1в}$, $y_{2в}$ и т. д. — прогибы сечений 1, 2, ..., n от внешних нагрузок, вычисляемые по формулам табл. 4.
 a — длина одного участка балки (шаг разбивки).

Формулы прогибов и углов поворота балки

Вид нагрузки	Прогибы y и углы поворота θ на участках 1 и 2
	$y_1 = \frac{M(x_1 - u)^2}{2EI}; \quad \theta_1 = \frac{M(x_1 - u)}{EI}.$
	$y_1 = N \left[\frac{(x_1 - b)^3}{6EI} - \frac{(x_1 - b)}{GF} \right];$ $\theta_1 = \frac{N(x - b)^2}{2EI}.$
	$y_1 = p \left[\frac{(x_1 - c)^4}{24EI} - \frac{(x_1 - c)^2}{2GF} \right];$ $y_2 = \frac{p}{24EI} [(x_2 - c)^4 - (x_2 - d)^4] -$ $- \frac{p}{2GF} [(x_2 - c)^2 - (x_2 - d)^2];$ $\theta_1 = \frac{p(x_1 - c)^3}{6EI};$ $\theta_2 = \frac{p}{6EI} [(x_2 - c)^3 - (x_2 - d)^3].$
	$y_1 = \frac{p(x_1 - c)^4}{120EIa} [5a - (x_1 - c)] -$ $- \frac{p(x_1 - c)^2}{6GFa} [3a - (x_1 - c)];$ $y_2 = \frac{p}{120EIa} [5a(x_2 - c)^4 - (x_2 - c)^5 + (x_2 - d)^5] -$ $- \frac{p}{6GFa} [3a(x_2 - c)^2 - (x_2 - c)^3 + (x_2 - d)^3];$ $\theta_1 = \frac{p(x_1 - c)^3}{24EIa} [4a - (x_1 - c)];$ $\theta_2 = \frac{p}{24EIa} [4a(x_2 - c)^3 - (x_2 - c)^4 + (x_2 - d)^4].$

Вид нагрузки	Прогибы y и углы поворота θ на участках 1 и 2
	$y_1 = \frac{p}{a} \left[\frac{(x_1 - c)^5}{120EI} - \frac{(x_1 - c)^3}{6GF} \right];$ $y_2 = \frac{p}{120EIa} [(x_2 - c)^5 - (x_2 - d)^5 - 5a(x_2 - d)^4] -$ $- \frac{p}{6GFa} [(x_2 - c)^3 - (x_2 - d)^3 - 3a(x_2 - d)^2];$ $\theta_1 = \frac{p(x_1 - c)^4}{24EIa};$ $\theta_2 = \frac{p}{24EIa} [(x_2 - c)^4 - (x_2 - d)^4 - 4a(x_2 - d)^3].$
	$y_1 = \frac{m(x_1 - c)^3}{6EI};$ $y_2 = \frac{m}{6EI} [(x_2 - c)^3 - (x_2 - d)^3];$ $\theta_1 = \frac{m(x_1 - c)^2}{2EI};$ $\theta_2 = \frac{m}{2EI} [(x_2 - c)^2 - (x_2 - d)^2].$
	$y_1 = \frac{m(x_1 - c)^3}{24EIa} [4a - (x_1 - c)];$ $y_2 = \frac{m}{24EIa} [4a(x_2 - c)^3 - (x_2 - d)^4 + (x_2 - d)^4];$ $\theta_1 = \frac{m(x_1 - c)^2}{6EIa} [3a - (x_1 - c)];$ $\theta_2 = \frac{m}{6EIa} [3a(x_2 - c)^2 - (x_2 - d)^3 + (x_2 - d)^3].$
	$y_1 = \frac{m(x_1 - c)^4}{24EIa};$ $y_2 = \frac{m}{24EIa} [(x_2 - c)^4 - (x_2 - d)^4 - 4a(x_2 - d)^3];$ $\theta_1 = \frac{m(x_1 - c)^3}{6EIa};$ $\theta_2 = \frac{m}{6EIa} [(x_2 - c)^3 - (x_2 - d)^3 - 3a(x_2 - d)^2].$

При $n + 1$ точках имеем $n + 1$ уравнений, содержащих $n + 1$ неизвестных значений погонных интенсивностей реакций оснований ($p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$) и два неизвестных начальных параметра y_0 и θ_0 , т. е. всего $n + 3$ неизвестных. Для составления недостающих двух уравнений воспользуемся двумя условиями равновесия балки

$$\Sigma Y = 0 \text{ и } \Sigma M = 0.$$

Сумма проекций всех сил на вертикальную ось

$$(p_0 + 2p_1 + 2p_2 + \dots + 2p_{n-1} + p_n) \frac{a}{2} + \Sigma Y_v = 0; \quad (37)$$

сумма моментов всех сил относительно точки n

$$[(3n - 1)p_0 + 6(n - 1)p_1 + 6(n - 2)p_2 + \dots + 6p_{n-1} + p_n] \frac{a}{6} + \Sigma M_{nv} = 0. \quad (38)$$

При выводе приведенных выше уравнений направления всех активных и реактивных воздействий приняты положительными, т. е. распределенные нагрузки, сосредоточенные силы и реакции основания направлены вверх, а изгибающие моменты — по часовой стрелке. Изгибная и сдвиговая жесткости приняты для простоты выводов постоянными по длине балки.

Совместное решение уравнений (36) — (38) дает возможность определить все неизвестные значения погонных интенсивностей реакций основания и начальных параметров.

Остановимся теперь на решении той же задачи методом конечных разностей, который в последние годы особенно широко применяется при решении задач теории упругости. Появление быстросрабатывающих вычислительных машин значительно расширило область применения различных численных методов расчета и в том числе метода конечных разностей.

В качестве исходного уравнения можно использовать любую из следующих дифференциальных зависимостей при изгибе балок:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}; \quad (39a)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{Q}{EI}; \quad (39б)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{q}{EI}; \quad (39в)$$

$$\frac{dQ}{dx} = q; \quad (39г)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q. \quad (39д)$$

При написании этих уравнений учитывалось расположение координатных осей и направление нагрузок согласно рис. 13.

Правило знаков для нагрузок и моментов установлено независимо от направления координатных осей в соответствии с правилами знаков, принятыми в сопротивлении материалов [5].

Каждое из приведенных уравнений может быть сведено к системе конечно-разностных уравнений. Для этого разобьем длину балки L на n равных частей длиной a (шаг), где

$$a = \frac{L}{n}.$$

Точки разбиения имеют абсциссы $x_i = ia$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) (рис. 12, а).

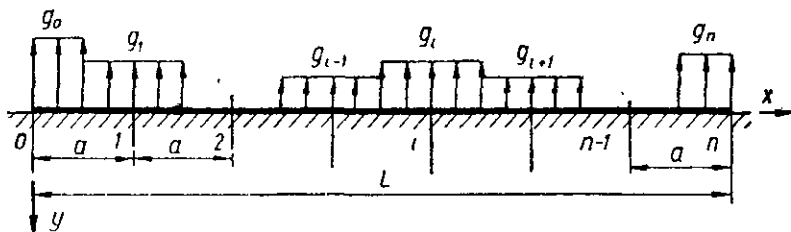


Рис. 13. Расчетная схема балки в методе конечных разностей.

Заменяя производные какой-либо искомой функции f (прогиба y , момента M или поперечной силы Q) симметричными конечно-разностными отношениями, получим известные формулы:

$$f'_i = \frac{df_i}{dx} = \frac{1}{2a} (-f_{i-1} + f_{i+1}); \quad (40a)$$

$$f''_i = \frac{d^2f_i}{dx^2} = \frac{1}{a^2} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}); \quad (40б)$$

$$f'''_i = \frac{d^3f_i}{dx^3} = \frac{1}{2a^3} (-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}); \quad (40в)$$

$$f^{IV}_i = \frac{d^4f_i}{dx^4} = \frac{1}{a^4} (f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}). \quad (40г)$$

Используя формулы (40), дифференциальные уравнения (39) приближенно можно заменить линейными алгебраическими уравнениями:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = -\frac{a^2}{EI_i} M_i; \quad (41a)$$

$$-y_{i-1} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2} = -\frac{2a^3}{EI_i} Q_i; \quad (41б)$$

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = -\frac{a^4}{EI_i} q_i; \quad (41в)$$

$$-Q_{i-1} + Q_{i+1} = 2aq_i; \quad (41г)$$

$$M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1} = a^2q_i. \quad (41д)$$

В этих уравнениях под нагрузкой q подразумевается суммарное воздействие на балку внешней распределенной нагрузки g и реактивных давлений p

$$q_i = p_i + g_i; \quad (42)$$

внешнюю нагрузку и реактивные давления считаем направленными в одну сторону.

Таким образом, в качестве неизвестных можно принимать либо прогибы балки, либо поперечные силы, либо изгибающие моменты, либо реактивные давления основания. В последнем случае в уравнение с неизвестными прогибами подставляются соотношения

$$y_i = \frac{p_i}{K_i}; \quad y_{i+1} = \frac{p_{i+1}}{K_{i+1}}$$

и т. д.

Возьмем, например, решение в моментах. Подставляя в уравнение (41д) значения q_i , по формуле (42), и учитывая, что $p_i = y_i K_i$, получим

$$M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1} = a^2 y_i K_i + a^2 g_i. \quad (43)$$

В это уравнение входят в качестве неизвестных, помимо моментов, также и прогибы, поэтому последние необходимо выразить через моменты.

Из уравнения (43) находим

$$y_i = \frac{1}{a^2 K_i} (M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1} - a^2 g_i).$$

По аналогии можем записать

$$y_{i+1} = \frac{1}{a^2 K_{i+1}} (M_i - 2M_{i+1} + M_{i+2} - a^2 g_{i+1}),$$

$$y_{i-1} = \frac{1}{a^2 K_{i-1}} (M_{i-2} - 2M_{i-1} + M_i - a^2 g_{i-1}).$$

Подставляя найденные выражения для прогибов в уравнение (41а), получаем основное уравнение рассматриваемой задачи в виде

$$\begin{aligned} \frac{M_{i-2}}{K_{i-1}} - 2 \left(\frac{1}{K_{i-1}} + \frac{1}{K_i} \right) M_{i-1} + \left(\frac{1}{K_{i-1}} + \frac{4}{K_i} + \frac{1}{K_{i+1}} + \frac{a^4}{EI_i} \right) M_i - \\ - 2 \left(\frac{1}{K_i} + \frac{1}{K_{i+1}} \right) M_{i+1} + \frac{M_{i+2}}{K_{i+1}} = a^2 \left(\frac{g_{i+1}}{K_{i+1}} - \frac{2g_i}{K_i} + \frac{g_{i-1}}{K_{i-1}} \right) \end{aligned} \quad (44)$$

($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Такие уравнения могут быть составлены для любой точки балки, поэтому для определения неизвестных моментов M можно получить достаточное количество уравнений. Каждое уравнение, кроме момента M_i , содержит еще по два момента справа и слева, т. е. получается система пятичленных уравнений, симметричная относительно главной диагонали.

Моменты M_0 и M_n в концевых сечениях балки известны из граничных условий. При написании уравнений для предконцевых сечений 1 и $n-1$ балку следует мысленно удлинить с каждой стороны на длину шага a и ввести фиктивные моменты M_{-1} и M_{n+1} . Значения этих моментов получаем из следующих условий.

Представим дифференциальную зависимость

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (45)$$

в конечных разностях

$$\begin{aligned} \frac{dM_0}{dx} &= \frac{1}{2a} (M_1 - M_{-1}) = Q_0; \\ \frac{dM_n}{dx} &= \frac{1}{2a} (M_{n+1} - M_{n-1}) = Q_n, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} M_{-1} &= M_1 - 2aQ_0, \\ M_{n+1} &= M_{n-1} + 2aQ_n. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Значения поперечных сил Q_0 и Q_n известны из граничных условий.

Когда моменты в сечениях найдены, то поперечные силы, реактивные давления и прогибы (вертикальные перемещения) легко можно найти по формулам конечных разностей.

Если в качестве исходного принять уравнение (41в), то получим решение в прогибах. В этом случае основное уравнение задачи будет иметь вид

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + \left(6 + \frac{K_i a^4}{EI_i}\right) y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = - \frac{g_i a^4}{EI_i}. \quad (47)$$

Взяв за основу иные уравнения, можно получить другие варианты решений как в прогибах, так и в моментах.

Следует заметить, что при одинаковом числе участков, на которые делится балка при расчете, метод начальных параметров дает значительно более точное решение, чем метод конечных разностей. Однако при весьма большом количестве участков эта разница сокращается, поэтому в таких задачах оба метода становятся почти равноценными по степени точности конечных результатов расчета.

Балка постоянной по длине жесткости на основании переменной жесткости

Составление систем уравнений, приведенных выше, весьма просто в принципе, но достаточно трудоемко на практике. При этом не исключена возможность появления случайных ошибок и неточностей.

Нами составлены готовые системы уравнений для расчета балок постоянной по всей длине жесткости, лежащих на упругом основании переменной жесткости. Уравнения составлены на базе метода начальных параметров. Рассмотрены как свободно лежащие на упругом основании балки, так и балки, имеющие сосредоточенные опоры различных типов. Пользуясь приводимыми ниже рекомендациями, можно без всяких затруднений записывать расчетные системы уравнений с любым числом неизвестных.

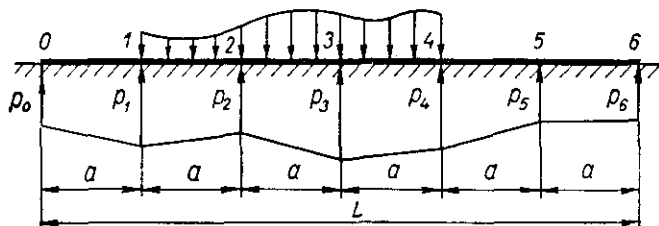


Рис. 14. Свободно лежащая балка.

Формулы коэффициентов и свободных членов составлены для случая, когда вся длина балки разделена на 6 одинаковых участков длиной a .

Каждая система уравнений состоит из двух совместно решаемых групп: уравнений совместности деформаций и уравнений равновесия. Коэффициенты при неизвестных реакциях изменяются с увеличением номера уравнения по определенному закону и могут быть легко вычислены для любого количества уравнений при помощи оперирования с конечными разностями. Многие коэффициенты повторяются в различных уравнениях. Для максимального облегчения составления уравнений в приложении приводятся таблицы рядов чисел, встречающихся в указанных системах уравнений.

Во всех уравнениях приняты следующие обозначения:

$$\beta = \frac{120EI}{a^4}; \quad \beta_i = \frac{\beta}{K_i}; \quad \eta = \frac{20EI}{a^2GF}, \quad (48)$$

где β , β_i , η — параметры, характеризующие жесткости балки и основания;

y_{iv} — прогиб точки i от действия внешней (активной) нагрузки;

θ_{iv} — угол поворота сечения i от внешней нагрузки;

$\sum Y_v$ — сумма проекций всех внешних сил на ось y ;

$\sum M_{nv}$ — сумма моментов всех внешних сил относительно точки n , расположенной на правом конце балки.

Приводим матрицы коэффициентов и свободных членов систем уравнений для важнейших случаев опирания балок.

Свободно лежащая балка (рис. 14). Система уравнений для расчета свободно лежащей балки приведена в табл. 5. Она получена

Таблица 5

Система уравнений для расчета свободно лежащей балки

№ уравнения	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	r_5	r_6	Свободные члены (в правой части)
Уравнения совместности								
1	$41 + \beta_0 - \eta$	$28 - 2\beta_1 - 4\eta$	$1 + \beta_2 - \eta$					$(2y_{1B} - y_{2B}) \beta$
2	$2(91 + \beta_0 - \eta)$	$177 - 3\beta_1 - 9\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_3 - \eta$				$(3y_{1B} - y_{3B}) \beta$
3	$3(161 + \beta_0 - \eta)$	$566 - 4\beta_1 - 14\eta$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_4 - \eta$			$(4y_{1B} - y_{4B}) \beta$
4	$4(251 + \beta_0 - \eta)$	$1315 - 5\beta_1 - 19\eta$	$570 - 18\eta$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_5 - \eta$		$(5y_{1B} - y_{5B}) \beta$
5	$5(361 + \beta_0 - \eta)$	$2544 - 6\beta_1 - 24\eta$	$1320 - 24\eta$	$570 - 18\eta$	$180 - 12\eta$	$1 + \beta_6 - \eta$		$(6y_{1B} - y_{6B}) \beta$

Уравнения равновесия

6	1	2	2	2	2	1	$-2 \frac{\Sigma Y_B}{a}$
7	17	30	24	18	12	1	$-6 \frac{\Sigma M_{nB}}{a^2}$

путем преобразования уравнений вида (36)–(38) в более удобную для практического применения систему.

Для этого выражения начальных параметров y_0 и θ_0 , найденные из первых двух уравнений системы (36), подставляются во все остальные уравнения. Таким образом, число совместно решаемых уравнений сокращается на два, и в качестве неизвестных остаются

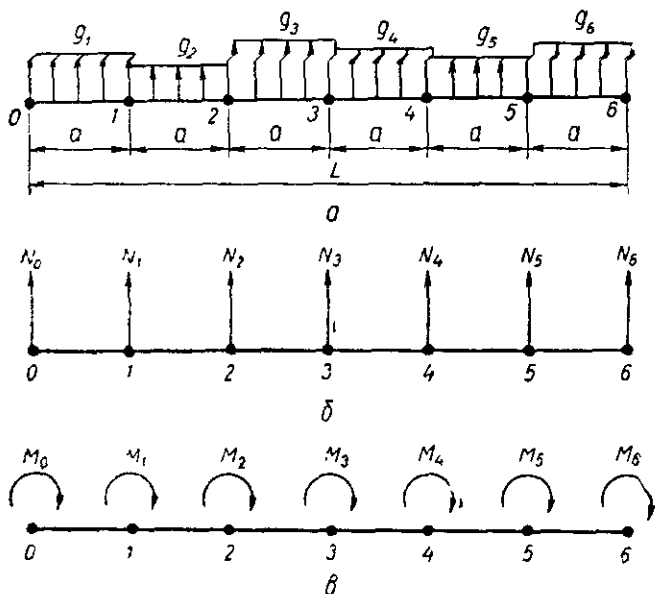


Рис. 15. Схемы нагрузок:

a — ступенчато переменная распределенная по участкам; b — сосредоточенные силы, приложенные на границах участков; c — изгибающие моменты, действующие на границах участков.

только реакции основания. Подобные преобразования сделаны для всех рассматриваемых ниже систем уравнений.

Рассмотрев группу уравнений совместности деформаций, можно обнаружить следующие закономерности их образования.

Количество неизвестных в первом уравнении равно трем и в каждом последующем уравнении оно увеличивается на одно. Коэффициенты при неизвестных интенсивностях реакций изменяются по определенным законам. Так, коэффициент при p_0 , стоящий перед скобкой, равен порядковому номеру уравнений, т. е. он может быть определен с помощью разности первого порядка, равной в данном случае 1. Коэффициенты, стоящие в скобках (41, 91, 161 и т. д.), определяются по более сложной зависимости. Здесь постоянной является разность второго порядка, следовательно, соответствующая функция является полиномом второй степени. Ряд вычисленных значений этого коэффициента приведен в при-

ложении (графа 1). Там же приведены значения всех коэффициентов, постоянная разность ряда которых выше первого порядка. Постоянную разность первого порядка имеют коэффициенты при параметре β_1 неизвестного p_1 , а также при всех параметрах η .

Коэффициенты при неизвестных, начиная с коэффициента при p_2 во втором уравнении, в последующих уравнениях повторяются, но там они уже принадлежат неизвестному с индексом, большим на единицу, чем в предыдущем уравнении.

В первом уравнении равновесия ($\Sigma Y = 0$) коэффициенты при концевых реакциях (p_0 и p_6) равны единице, при всех промежуточных — равны двум.

Коэффициенты при неизвестных второго уравнения равновесия ($\Sigma M_n = 0$) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A_0 &= 3n - 1; \\ A_i &= 6(n - i) \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1); \\ A_n &= 1, \end{aligned} \quad (49)$$

где n — число участков, на которые разделена балка для расчета;
 i — номер неизвестной интенсивности реакций.

Свободный член уравнения совместности определяется по формуле

$$B_r = [(r + 1) y_{1b} - y_{r+1,b}] \beta, \quad (50)$$

где r — номер уравнения совместности;

y_{1b} и $y_{r+1,b}$ — прогибы балки в точках 1 и $r + 1$ от внешней нагрузки, определяемые по формулам табл. 4.

Для нагрузок, расположенных согласно рис. 15, имеются готовые формулы свободных членов уравнений совместности [22].

При ступенчато переменной распределенной нагрузке (рис. 15, а):

$$\begin{aligned} B_{1g} &= -[g_1(65 - 3\eta) + g_2(5 - 3\eta)]; \\ B_{2g} &= -[g_1(310 - 6\eta) + g_2(75 - 9\eta) + g_3(5 - 3\eta)]; \\ B_{3g} &= -[g_1(855 - 9\eta) + g_2(325 - 15\eta) + g_3(75 - 9\eta) + \\ &\quad + g_4(5 - 3\eta)]; \\ B_{4g} &= -[g_1(1820 - 12\eta) + g_2(875 - 21\eta) + \\ &\quad + g_3(325 - 15\eta) + g_4(75 - 9\eta) + g_5(5 - 3\eta)] \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (51)$$

При сосредоточенных силах (рис. 15, б):

$$\begin{aligned} B_{1N} &= -\frac{2}{a} [60N_0 + N_1(10 - 3\eta)]; \\ B_{2N} &= -\frac{2}{a} [240N_0 + N_1(80 - 6\eta) + N_2(10 - 3\eta)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{3N} &= -\frac{2}{a} [600N_0 + N_1(270 - 9\eta) + \\
&\quad + N_2(80 - 6\eta) + N_3(10 - 3\eta)]; \\
B_{4N} &= -\frac{2}{a} [1200N_0 + N_1(640 - 12\eta) + N_2(270 - 9\eta) + \\
&\quad + N_3(80 - 6\eta) + N_4(10 - 3\eta)] \text{ и т. д.} \quad (52)
\end{aligned}$$

При сосредоточенных изгибающих моментах (рис. 15, в):

$$\begin{aligned}
B_{1M} &= -\frac{60}{a^2} (2M_0 + M_1); \\
B_{2M} &= -\frac{60}{a^2} (6M_0 + 4M_1 + M_2); \\
B_{3M} &= -\frac{60}{a^2} (12M_0 + 9M_1 + 4M_2 + M_3); \\
B_{4M} &= -\frac{60}{a^2} (20M_0 + 16M_1 + 9M_2 + 4M_3 + M_4) \text{ и т. д.} \quad (53)
\end{aligned}$$

Численные значения коэффициентов при нагрузках в выражениях (51) — (53) также изменяются с изменением номера уравнения. При этом достаточно иметь ряд значений коэффициентов при первых двух членах, чтобы автоматически записать коэффициенты при остальных членах каждой формулы. Значения основных коэффициентов приведены в приложении.

Рассмотрим несколько примеров составления системы расчетных уравнений.

А. Длина балки разделена на 3 участка: $a = \frac{L}{3}$, $n = 3$. В этом случае имеем 4 неизвестных: p_0, p_1, p_2, p_3 . Для их определения необходимо иметь 4 уравнения: 2 совместности и 2 равновесия. Влиянием деформаций сдвига пренебрегаем.

Из табл. 5 первые два уравнения выписываем без изменений. Уравнения равновесия будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
3) \quad p_0 + 2p_1 + 2p_2 + p_3 &= -\frac{2}{a} \sum Y_n; \\
4) \quad 8p_0 + 12p_1 + 6p_2 + p_3 &= -\frac{6}{a^2} \sum M_{nB}.
\end{aligned}$$

Здесь коэффициент при p_0 четвертого уравнения **вычислен** по формуле (49)

$$A_0 = 3n - 1 = 3 \cdot 3 - 1 = 8.$$

Б. Длина балки разделена на 10 участков: $a = \frac{L}{10}$, $n = 10$.

Неизвестных интенсивностей реакций основания на единицу больше числа участков; следовательно, надо составить систему из 11 уравнений, которая должна содержать 9 уравнений совместности и 2 равновесия. Первые пять уравнений совместности без

всяких изменений выписываются из табл. 5. Остальные 4 уравнения записываются автоматически, пользуясь рядами чисел из приложения и повторяемостью части коэффициентов:

$$\begin{aligned} 6) & 6(491 + \beta_0) p_0 + (4373 - 7\beta_1) p_1 + 2550 p_2 + 1320 p_3 + \\ & + 570 p_4 + 180 p_5 + 30 p_6 + (1 + \beta_7) p_7 = (7y_{1в} - y_{7в}) \beta; \\ 7) & 7(641 + \beta_0) p_0 + (6922 - 8\beta_1) p_1 + 4380 p_2 + 2550 p_3 + 1320 p_4 + \\ & + 570 p_5 + 180 p_6 + 30 p_7 + (1 + \beta_8) p_8 = (8y_{1в} - y_{8в}) \beta \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Здесь, как и в предыдущем примере, влияние деформаций сдвига не учитываем.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} 10) & p_0 + 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 2p_4 + 2p_5 + 2p_6 + 2p_7 + \\ & + 2p_8 + 2p_9 + p_{10} = -\frac{2}{a} \sum Y_v; \\ 11) & 29p_0 + 54p_1 + 48p_2 + 42p_3 + 36p_4 + 30p_5 + 24p_6 + 18p_7 + \\ & + 12p_8 + 6p_9 + p_{10} = -\frac{6}{a^2} \sum M_{nv}. \end{aligned}$$

Приведенные примеры записи уравнений показывают, что этот процесс весьма прост и может выполняться почти автоматически.

Балка с шарнирно-неподвижной опорой на правом конце (рис. 16). Система уравнений для определения погонных интенсивностей реакций в точках 0, 1, 2, ..., 5 и сосредоточенной реакции R_6 , возникающей в шарнирной опоре, приведена в табл. 6. Здесь для сокращения записи свободные члены уравнений совместно обозначены через B_1, B_2, \dots, B_5 . Они определяются по формуле (50), как и для свободно лежащей балки.

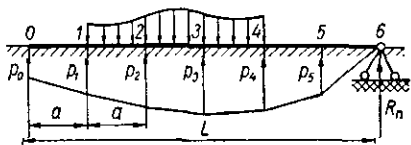


Рис. 16. Балка с шарнирно-неподвижной опорой на правом конце.

При записи уравнений с числом участков большим или меньшим шести следует иметь в виду, что на правом конце балки погонная интенсивность реакции равна нулю, т. е. $p_n = 0$. Например, при трех участках будем иметь такую систему уравнений ($\eta = 0$):

$$\begin{aligned} (41 + \beta_0) p_0 + (28 - 2\beta_1) p_1 + (1 + \beta_2) p_2 &= B_1; \\ 2(91 + \beta_0) p_0 + (177 - 3\beta_1) p_1 + 30p_2 &= B_2; \\ p_0 + 2p_1 + 2p_2 + \frac{2}{a} R_n &= -\frac{2}{a} \sum Y_v; \\ 8p_0 + 12p_1 + 6p_2 &= -\frac{6}{a^2} \sum M_{nv}. \end{aligned}$$

Таблица 6

Система уравнений для расчета балки с шарнирно-неподвижной опорой на правом конце

№ уравнения	P_0	i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	R_{II}	Свободные члены (в правой части)
Уравнения совместности									
1	$41 + \beta_0 - \eta$	$28 - 2\beta_1 - 4\eta$	$1 + \beta_2 - \eta$						B_1
2	$2(91 + \beta_0 - \eta)$	$177 - 3\beta_1 - 9\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_3 - \eta$					B_2
3	$3(161 + \beta_0 - \eta)$	$566 - 4\beta_1 - 14\eta$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_4 - \eta$				B_3
4	$4(251 + \beta_0 - \eta)$	$1315 - 5\beta_1 - 19\eta$	$570 - 18\eta$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_5 - \eta$			B_4
5	$5(361 + \beta_0 - \eta)$	$2544 - 6\beta_1 - 24\eta$	$1320 - 24\eta$	$570 - 18\eta$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$			B_5

Уравнения равновесия

6	1	2	2	2	2	2	2	$-\frac{2}{a} \sum Y_8$
7	17	30	24	18	12	6	0	$-\frac{6}{a^2} \sum M_{nv}$

Балка с шарнирно-неподвижными опорами на обоих концах (рис. 17). Система уравнений приведена в табл. 7. При ее использовании надлежит руководствоваться указаниями, сделанными выше.

Балка с жесткозащемленным левым концом (рис. 18). В этом случае прогиб и угол поворота сечения O равны нулю. Количество

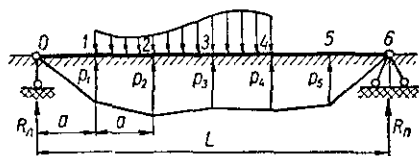


Рис. 17. Балка с двумя шарнирно-неподвижными опорами на обоих концах

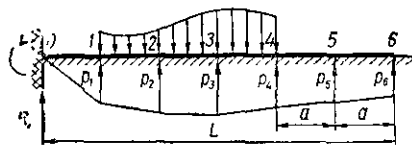


Рис. 18. Балка с жесткозащемленным левым концом.

известных по сравнению со свободно лежащей балкой на одно больше, так как в жесткой заделке возникают две неизвестные сосредоточенные реакции $M_{\text{д}}$ и $R_{\text{д}}$.

В табл. 8 приведена система

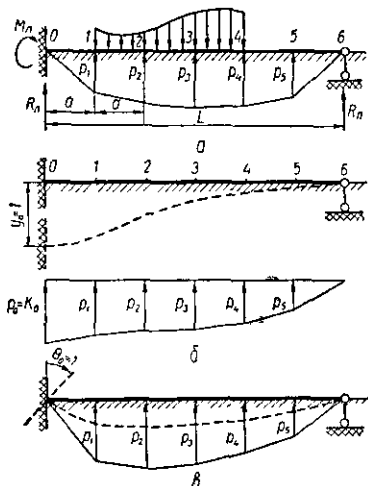


Рис. 19. Балка с одним защемленным и другим шарнирно-опертым концом:

a — воздействие вида силовой нагрузки, $б$ — единичная осадка защемленной опоры, $в$ — единичный поворот защемленной опоры

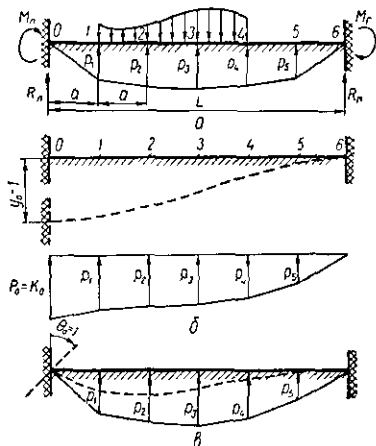


Рис. 20. Балка с двумя жесткозащемленными концами:

a — воздействие вида силовой нагрузки; $б$ — единичная осадка заделки; $в$ — единичный поворот заделки

расчетных уравнений при шести участках, которая может быть использована для составления систем уравнений с любым количеством неизвестных.

Если жесткая заделка расположена на правом конце балки, а левый свободен, то в этом случае условно считается, что сечение

Система уравнений для расчета балки с шарнирно-неподвижными опорами на обоих концах

№ уравнения	R_{Π}	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	R_{Π}	Свободные члены (в правой части)
Уравнения совместности								
1	$\frac{120}{a}$	$28 - 2\beta_1 - 4\eta$	$1 + \beta_2 - \eta$					B_1
2	$\frac{480}{a}$	$177 - 3\beta_1 - 9\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_3 - \eta$				B_2
3	$\frac{1200}{a}$	$566 - 4\beta_1 - 14\eta$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_4 - \eta$			B_3
4	$\frac{2400}{a}$	$1315 - 5\beta_1 - 19\eta$	$570 - 18\eta$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_5 - \eta$		B_4
5	$\frac{4200}{a}$	$2544 - 6\beta_1 - 24\eta$	$1320 - 24\eta$	$570 - 18\eta$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$		B_5

Уравнения равновесия

6	$\frac{2}{a}$	2	2	2	2	2	$\frac{2}{a}$	$-\frac{2}{a} \sum Y_u$
7	$\frac{6}{a^2} L$	30	24	18	12	6	0	$-\frac{6}{a^2} \sum M_{\Pi B}$

Система уравнений для расчета балки с жесткозакрепленным левым концом

№ уравнения	M_{Π}	R_{Π}	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	Свободные члены (в правой части)
Уравнения совместности									
1	$\frac{60}{a^2}$	$\frac{1}{a} (20 - 6\eta)$	$1 + \beta_1 - \eta$						$-y_{1B} \beta$
2	$\frac{240}{a^2}$	$\frac{1}{a} (160 - 12\eta)$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_2 - \eta$					$-y_{2B} \beta$
3	$\frac{540}{a^2}$	$\frac{1}{a} (540 - 18\eta)$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_3 - \eta$				$-y_{3B} \beta$
4	$\frac{960}{a^2}$	$\frac{1}{a} (1280 - 24\eta)$	$570 - 18\eta$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_4 - \eta$			$-y_{4B} \beta$
5	$\frac{1500}{a^2}$	$\frac{1}{a} (2500 - 30\eta)$	$1320 - 24\eta$	$570 - 18\eta$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_5 - \eta$		$-y_{5B} \beta$
6	$\frac{2160}{a^2}$	$\frac{1}{a} (4320 - 36\eta)$	$2550 - 30\eta$	$1320 - 24\eta$	$570 - 18\eta$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_6 - \eta$	$-y_{6B} \beta$
Уравнения равновесия									
7	0	$\frac{2}{a}$	2	2	2	2	2	1	$-\frac{2}{a} \Sigma Y_B$
8	$\frac{6}{a^2}$	$\frac{6}{a^2} L$	30	24	18	12	6	1	$-\frac{6}{a^2} \Sigma M_{\Pi B}$

Система уравнений для расчета балки с одним защемленным и другим

№ урав- нения	M_L	R_L	P_1	P_2	P_3	
<i>Уравнения</i>						
1	$\frac{60}{a^2}$	$\frac{1}{a} (20 - 6\eta)$	$1 + \beta_1 - \eta$			
2	$\frac{240}{a^2}$	$\frac{1}{a} (160 - 12\eta)$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_2 - \eta$		
3	$\frac{540}{a^2}$	$\frac{1}{a} (540 - 18\eta)$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_3 - \eta$	
4	$\frac{960}{a^2}$	$\frac{1}{a} (1280 - 24\eta)$	$570 - 18\eta$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$	
5	$\frac{1500}{a^2}$	$\frac{1}{a} (2500 - 30\eta)$	$1320 - 24\eta$	$570 - 18\eta$	$180 - 12\eta$	
6	$\frac{2160}{a^2}$	$\frac{1}{a} (4320 - 36\eta)$	$2550 - 30\eta$	$1320 - 24\eta$	$570 - 18\eta$	
<i>Уравнения</i>						
7	0	$\frac{2}{a}$	2	2	2	
8	$\frac{6}{a^2}$	$\frac{6}{a^2} L$	30	24	18	

O находится на правом конце, откуда и производится нумерация участков.

Балка с одним защемленным и другим шарнирно-опертым концом (рис. 19). Система уравнений приведена в табл. 9, где имеются три графы свободных членов, соответствующих воздействиям, изображенным на рис. 19.

Балка с двумя жесткозащемленными концами (рис. 20). Подобно предыдущей системе здесь также составлены три графы свободных членов, соответствующих воздействию внешней нагрузки, единичной осадке опоры O и единичному углу поворота этой опоры (табл. 10).

Рассмотрев табл. 10, можно заметить, что закономерность в образовании уравнений совместности деформаций нарушена в последнем из этих уравнений, т. е. в уравнении (7). Дело в том,

Таблица 9

шарнирно опертым концом

p_1	p_2	R_{II}	Свободные члены (в правой части)		
			Внешняя нагрузка (рис. 19, а)	Единичная осадка зашемленного конца (рис. 19, б)	Единичный по- ворот зашемлен- ного конца (рис. 19, в)
<i>совместности</i>					
			$-y_{1в} \beta$	$K_0(2\eta - 4) - \beta$	$-\beta a$
			$-y_{2в} \beta$	$K_0(5\eta - 49) - \beta$	$-2\beta a$
			$-y_{3в} \beta$	$K_0(8\eta - 194) - \beta$	$-3\beta a$
$1 + \beta_1 - \eta$			$-y_{4в} \beta$	$K_0(11\eta - 499) - \beta$	$-4\beta a$
$30 - 6\eta$	$1 + \beta_2 - \eta$		$-y_{5в} \beta$	$K_0(14\eta - 1024) - \beta$	$-5\beta a$
$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$		$-y_{6в} \beta$	$K_0(17\eta - 1829) - \beta$	$-6\beta a$
<i>равновесия</i>					
2	2	$\frac{2}{a}$	$-\frac{2}{a} \sum Y_{в}$	$-K_0$	0
12	6	0	$-\frac{6}{a^2} \sum M_{пв}$	0	0

что для решения задачи в данном случае пришлось воспользоваться дополнительным условием равенства нулю угла поворота крайнего правого сечения балки

$$\theta_6 = \theta_6(p) + \theta_6(M_{л}) + \theta_6(R_{л}) + \theta_{6в} = 0, \quad (54)$$

где $\theta_6(p)$, $\theta_6(M_{л})$, $\theta_6(R_{л})$ и $\theta_{6в}$ — углы поворота сечения 6 от реактивных давлений, опорного момента левой заделки, опорной реакции этой же заделки и внешней (активной) нагрузки.

Вид уравнения (54) зависит от количества участков, на которые разбита балка. В табл. 11 приведены готовые уравнения этого типа, которыми следует пользоваться при составлении уравнений с числом участков $n \neq 6$. Анализ уравнений углов поворота показывает, что каждое последующее уравнение легко может быть получено из предыдущего. В каждом последующем уравнении

Система уравнений для расчета балки с жесткозащемленными концами

№ урав- нения	M_L	R_L	p_1	p_2	p_3
<i>Уравнения</i>					
1	$\frac{60}{a^2}$	$\frac{1}{a} (20 - 6\eta)$	$1 + \beta_1 - \eta$		
2	$\frac{240}{a^2}$	$\frac{1}{a} (160 - 12\eta)$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_2 - \eta$	
3	$\frac{540}{a^2}$	$\frac{1}{a} (540 - 18\eta)$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$	$1 + \beta_3 - \eta$
4	$\frac{960}{a^2}$	$\frac{1}{a} (1280 - 24\eta)$	$570 - 18\eta$	$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$
5	$\frac{1500}{a^2}$	$\frac{1}{a} (2500 - 30\eta)$	$1320 - 24\eta$	$570 - 18\eta$	$180 - 12\eta$
6	$\frac{2160}{a^2}$	$\frac{1}{a} (4320 - 33\eta)$	$2550 - 30\eta$	$1320 - 24\eta$	$570 - 18\eta$
7	$\frac{720}{a^2}$	$\frac{2160}{a}$	1510	970	550
<i>Уравнения</i>					
8	0	$\frac{2}{a}$	2	2	2
9	$\frac{6}{a^2}$	$\frac{6}{a^2} L$	30	24	18

коэффициент при M_L увеличивается на 120; коэффициенты при R_L берутся из приложения (графа 11); коэффициенты при p_1 данного уравнения падаются путем увеличения на 10 коэффициента при R_L предыдущего уравнения; коэффициенты при p_2, p_3, \dots, p_n записываются по диагоналям в зависимости от коэффициентов при p_1 , как указано в табл. 11.

**Балка постоянной жесткости
на упругом основании постоянной жесткости**

При расчете балок постоянной по длине жесткости, лежащих на упругом основании с постоянным коэффициентом жесткости, обычно используются такие характеристики:

Таблица 10

p_1	p_2	R_{II}	M_{II}	Свободные члены (в правой части)		
				Внешняя нагрузка (рис. 20, а)	Единичная осадка опоры О (рис. 20, б)	Единичный поворот опоры О (рис. 20, в)
совместности						
				$-y_{1B} \beta$	$K_0 (2\eta - 4) - \beta$	$-\beta a$
				$-y_{2B} \beta$	$K_0 (5\eta - 49) - \beta$	$-2\beta a$
				$-y_{3B} \beta$	$K_0 (8\eta - 194) - \beta$	$-3\beta a$
$1 + \beta_4 - \eta$				$-y_{4B} \beta$	$K_0 (11\eta - 499) - \beta$	$-4\beta a$
$30 - 6\eta$	$1 + \beta_5 - \eta$			$-y_{5B} \beta$	$K_0 (14\eta - 1024) - \beta$	$-5\beta a$
$180 - 12\eta$	$30 - 6\eta$			$-y_{6B} \beta$	$K_0 (17\eta - 1829) - \beta$	$-6\beta a$
250	70			$-y_{6B} a \beta$	$-935 \cdot K_0$	$-\beta a$
равновесия						
2	2	$\frac{2}{a}$	0	$-\frac{2}{a} \cdot \Sigma Y_n$	$-K_0$	0
12	6	0	$\frac{6}{a^2}$	$-\frac{6}{a^2} \cdot \Sigma M_{nB}$	0	0

показатель жесткости системы балка — основание

$$m = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}; \quad (55)$$

приведенная длина

$$\lambda = Lm, \quad (56)$$

где K — погонный коэффициент жесткости основания; EI — изгибная жесткость балки; L — полная длина балки.

В зависимости от численного значения приведенной длины балки делятся на три категории:

балки жесткие, если $\lambda < 1$;балки короткие, если $1 \leq \lambda \leq 6$;балки длинные, если $\lambda > 6$.

Таблица 11

Уравнения углов поворота для балки с обоями зашеченными концами

Количество участков	M_{\perp}	R_{\perp}	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	Свободные члены (в правой части)		
										Внешняя нагрузка (рис. 20, а)	Единичная осадка опоры О (рис. 20, б)	Единичный поворот опоры О (рис. 20, в)
2	$\frac{240}{a^2}$	$\frac{240}{a}$	70							$-0_{2B} a\beta$	$-85 K_0$	$-\beta a$
3	$\frac{360}{a^2}$	$\frac{540}{a}$	250	70						$-0_{3B} a\beta$	$-245 K_0$	$-\beta a$
4	$\frac{480}{a^2}$	$\frac{960}{a}$	550	250	70					$-0_{4B} a\beta$	$-405 K_0$	$-\beta a$
5	$\frac{600}{a^2}$	$\frac{1500}{a}$	970	550	250	70				$-0_{5B} a\beta$	$-655 K_0$	$-\beta a$
6	$\frac{720}{a^2}$	$\frac{2160}{a}$	1510	970	550	250	70			$-0_{6B} a\beta$	$-935 K_0$	$-\beta a$
7	$\frac{840}{a^2}$	$\frac{2940}{a}$	2170	1510	970	550	250	70		$-0_{7B} a\beta$	$-1335 K_0$	$-\beta a$
8	$\frac{960}{a^2}$	$\frac{3840}{a}$	2950	2170	1510	970	550	250	70	$-0_{8B} a\beta$	$-1765 K_0$	$-\beta a$

Жесткие балки характеризуются тем, что эпюра реактивных давлений основания у них ограничена практически прямой линией. При расчете таких балок можно пренебречь влиянием изгиба и считать их абсолютно жесткими. Для определения реакций основания здесь можно пользоваться известными формулами внецентренного сжатия.

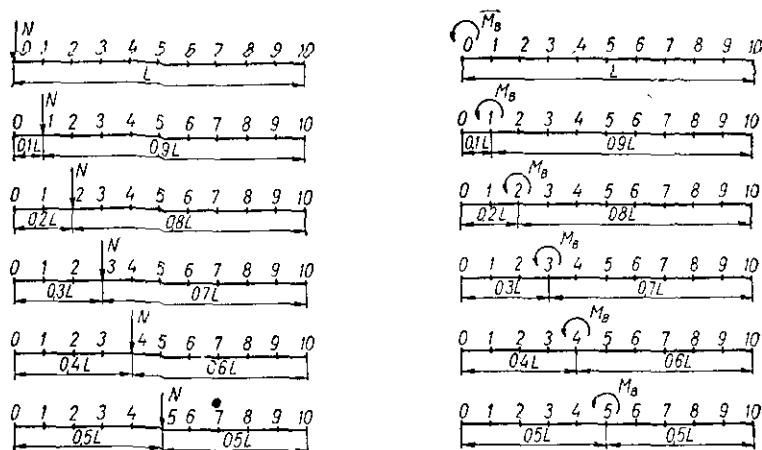


Рис. 21. Схемы расположения нагрузок, для которых составлены табл. 12—25.

В случае коротких балок прогиб от изгиба балки сопоставим по величине с осадкой основания и им пренебрегать нельзя. Характерной особенностью балок этой категории является то, что сила, действующая в каком-либо сечении балки, оказывает значительное влияние на всю балку. Такого рода балки называют также балками конечной длины, в отличие от абсолютно жестких и бесконечно длинных балок. Короткие балки рассчитываются по методам теории расчета конструкций на упругом основании.

При рассмотрении длинных балок можно считать, что они являются бесконечно длинными, т. е. сила, приложенная к одному концу балки, не оказывает влияния на другой конец. Расчет таких балок производится также методами теории расчета конструкций на упругом основании.

Для радикального упрощения расчета указанных трех категорий балок автором составлены таблицы (табл. 12—25). Рассмотрены нагрузки в виде сосредоточенной силы и момента, схемы расположения которых представлены на рис. 21. При наличии сплошной нагрузки последняя разбивается на сосредоточенные силы или моменты, приложенные в точках деления балки (0, 1, ..., 10). Значения расчетных величин реактивных давлений p изгибающих моментов M и поперечных сил Q устанавливаются от действия

каждой сосредоточенной нагрузки в отдельности с последующим их суммированием.

Таблицы составлены для значений λ , равных 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Этими значениями приведенной длины охватываются все категории балок: таблицы для $\lambda = 1$ используются для расчета жестких балок; таблицы для $\lambda = 7$ — для расчета длинных балок.

В таблицах приведены безразмерные значения реактивных давлений основания, изгибающих моментов и поперечных сил, обозначенных соответственно через p^T , M^T и Q^T , где индекс «т» означает «табличное». Значения этих расчетных величин получены из расчетов балок с помощью систем уравнений типа табл. 10 при делении балки на 10 участков равной длины $a = 0,1L$.

Расчет балок при помощи табл. 12—25 производится следующим образом.

Вычисляется показатель жесткости m по формуле (55) и приведенная длина балки λ по формуле (56).

При $1 \leq \lambda \leq 7$ выбирается таблица, ближайшая к полученному значению λ . Например, если $\lambda = 4,7$, используется таблица для $\lambda = 5$ или значения расчетных величин берутся по интерполяции.

Для заранее выбранных сечений балки вычисляются значения расчетных величин по формулам:

при нагрузке силой N , m

$$\left. \begin{aligned} p &= p^T \frac{N}{L} \text{ т/м;} \\ M &= M^T N L \text{ тм;} \\ Q &= Q^T N \text{ т;} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

при нагрузке моментом M_v , $тм$

$$\left. \begin{aligned} p &= p^T \frac{M_v}{L^2} \text{ т/м;} \\ M &= M^T M_v \text{ тм;} \\ Q &= Q^T \frac{M_v}{L} \text{ т.} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Значения Q^T и M^T со звездочкой относятся к величине поперечной силы (табл. 12—18) или момента (табл. 19—25) в сечении, расположенном непосредственно левее загруженного сечения. Значения Q^T и M^T справа от точки приложения нагрузки соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} Q_{пр}^T &= Q_{лев}^T - 1; \\ M_{пр}^T &= M_{лев}^T - 1. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Вертикальные перемещения балки определяются по известной формуле

$$y_i = \frac{p_i}{K}.$$

Для иллюстрации пользования таблицами в конце настоящей главы приведен численный пример расчета (пример 3).

При расчете жестких балок, когда $\lambda < 1$, используются табл. 12 или 19, относящиеся к $\lambda = 1$.

В случае бесконечно длинных или полубесконечных балок ($\lambda > 7$) используются табл. 18 или 25, составленные для $\lambda = 7$. Для этой категории балок значения расчетных величин следует вычислять не по формулам (57) и (58), а по следующим формулам, приводящим результаты расчета балки конечной длины к балке бесконечной длины.

При нагрузке силой N , m

$$\left. \begin{aligned} p &= p^T \frac{Nm}{7} \text{ мм}; \\ M &= M^T \frac{7N}{m} \text{ мм}; \\ Q &= Q^T N \text{ м}; \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

при нагрузке моментом M_B , mm

$$\left. \begin{aligned} p &= p^T \frac{M_B m^2}{49} \text{ м/мм}; \\ M &= M^T M_B \text{ мм}; \\ Q &= Q^T \frac{M_B m}{7} \text{ м}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

При этом вместо действительных абсцисс x при начале отсчета в загруженном сечении применяются приведенные абсциссы $\xi = xm$. Если при расчете коротких и жестких балок расстояния между сечениями, для которых в таблицах имеются значения p^T , M^T и Q^T , равнялось $0,1L$, то в случае бесконечных и полубесконечных балок это расстояние равно $0,1 m$.

Для расчета бесконечных балок используется только графа 5, относящаяся к симметрической нагрузке балки; для расчета полубесконечных балок — графы 0, 1, 2, 3 и 4.

Расчет бесконечных и полубесконечных балок удобно также производить по таблицам, приведенным в работах [14] и [24].

$$\lambda = 1$$

№ сече- ния	Точка приложения силы N					
	0	1	2	3	4	5
<i>Реактивное давление p^T</i>						
0	4,0374	3,4175	2,8005	2,1885	1,5822	0,9815
1	3,4172	2,9294	2,4414	1,9548	1,4708	0,9898
2	2,8000	2,4412	2,0817	1,7205	1,3589	0,9978
3	2,1881	1,9545	1,7204	1,4846	1,2446	1,0050
4	1,5818	1,4705	1,3588	1,2458	1,1301	1,0104
5	0,9811	0,9895	0,9977	1,0049	1,0104	1,0125
6	0,3854	0,5115	0,6375	0,7630	0,8876	1,0104
7	-0,2065	0,0359	0,2783	0,5207	0,7631	1,0050
8	-0,7959	-0,4381	-0,0801	0,2784	0,6376	0,9978
9	-1,3841	-0,9112	-0,4380	0,0360	0,5117	0,9898
10	-1,9718	-1,3840	-0,7958	-0,2063	0,3857	0,9815
<i>Изгибающий момент M^T</i>						
0	0	0	0	0	0	0
1	-0,0808	0,0163	0,0134	0,0106	0,0077	0,0049
2	-0,1275	-0,0382	0,0512	0,0407	0,0302	0,0197
3	-0,1462	-0,0682	0,0099	0,0880	0,0662	0,0445
4	-0,1429	-0,0786	-0,0143	0,0501	0,1147	0,0794
5	-0,1239	-0,0744	-0,0249	0,0247	0,0744	0,1243
6	-0,0950	-0,0603	-0,0255	0,0093	0,0443	0,0794
7	-0,0623	-0,0410	-0,0197	0,0016	0,0230	0,0445
8	-0,0316	-0,0214	-0,0111	-0,0009	0,0094	0,0197
9	-0,0089	-0,0061	-0,0034	-0,0006	0,0021	0,0049
10	0	0	0	0	0	0
<i>Поперечная сила Q^T</i>						
0	0 *	0	0	0	0	0
1	-0,6273	0,3173 *	0,2621	0,2072	0,1526	0,0986
2	-0,3164	-0,4141	0,4883 *	0,3909	0,2941	0,1979
3	-0,0670	-0,1943	-0,3216	0,5512 *	0,4244	0,2981
4	0,1215	-0,0231	-0,1676	-0,3123	0,5432 *	0,3989
5	0,2496	0,0999	-0,0499	-0,1998	-0,3498	0,5000 *
6	0,3180	0,1750	0,0319	-0,1114	-0,2549	-0,3989
7	0,3269	0,2023	0,0777	-0,0472	-0,1724	-0,2981
8	0,2768	0,1822	0,0876	-0,0072	-0,1023	-0,1979
9	0,1678	0,1148	0,0617	0,0085	-0,0449	-0,0986
10	0	0	0	0	0	0

$$\lambda = 2$$

№ сече- ния	Точка приложения силы N					
	0	1	2	3	4	5
<i>Реактивное давление p^T</i>						
0	4,5441	3,6508	2,8040	2,0317	1,3437	0,7368
1	3,6466	3,0550	2,4599	1,8844	1,3470	0,8537
2	2,7976	2,4573	2,1058	1,7298	1,3453	0,9678
3	2,0245	1,8806	1,7283	1,5494	1,3256	1,0709
4	1,3369	1,3428	1,3431	1,3248	1,2664	1,1489
5	0,7310	0,8500	0,9657	1,0699	1,1486	1,1807
6	0,1945	0,3992	0,6027	0,8013	0,9875	1,1489
7	-0,2897	-0,0178	0,2547	0,5283	0,8019	1,0709
8	-0,7400	-0,4120	-0,0816	0,2556	0,6043	0,9678
9	-1,1730	-0,7942	-0,4112	-0,0160	0,4021	0,8537
10	-1,6008	-1,1726	-0,7386	-0,2869	0,1988	0,7368
<i>Изгибающий момент M^T</i>						
0	0	0	0	0	0	0
1	-0,0788	0,0173	0,0134	0,0099	0,0067	0,0039
2	-0,1210	-0,0349	0,0515	0,0387	0,0269	0,0163
3	-0,1351	-0,0625	0,0105	0,0847	0,0605	0,0384
4	-0,1289	-0,0712	-0,0132	0,0461	0,1073	0,0711
5	-0,1091	-0,0664	-0,0234	0,0207	0,0667	0,1152
6	-0,0819	-0,0531	-0,0240	0,0060	0,0375	0,0711
7	-0,0527	-0,0357	-0,0185	-0,0007	0,0181	0,0384
8	-0,0263	-0,0184	-0,0104	-0,0021	0,0067	0,0163
9	-0,0073	-0,0052	-0,0031	-0,0010	0,0013	0,0039
10	0	0	0	0	0	0
<i>Поперечная сила Q^T</i>						
0	0*	0	0	0	0	0
1	-0,5905	0,3353*	0,2632	0,1958	0,1345	0,0795
2	-0,2683	-0,3891	0,4915*	0,3765	0,2691	0,1706
3	-0,0272	-0,1722	-0,3168	0,5405*	0,4027	0,2725
4	0,1409	-0,0110	-0,1633	-0,3158	0,5323*	0,3835
5	0,2443	0,0986	-0,0478	-0,1961	-0,3470	0,5000*
6	0,2906	0,1611	0,0306	-0,1025	-0,2402	-0,3835
7	0,2858	0,1801	0,0735	-0,0360	-0,1507	-0,2725
8	0,2343	0,1587	0,0821	0,0032	-0,0804	-0,1706
9	0,1387	0,0983	0,0575	0,0151	-0,0300	-0,0795
10	0	0	0	0	0	0

$$\lambda = 3$$

№ сечения	Точка приложения силы N					
	0	1	2	3	4	5
<i>Реактивное давление p^T</i>						
0	6,0163	4,2818	2,7602	1,5564	0,6831	0,1003
1	4,2622	3,3981	2,5052	1,6840	1,0070	0,4911
2	2,7325	2,4945	2,2001	1,7812	1,3153	0,8769
3	1,5281	1,6691	1,7755	1,7674	1,5620	1,2369
4	0,6586	0,9920	1,3077	1,5593	1,6586	1,5224
5	0,0814	0,4786	0,8697	1,2337	1,5216	1,6450
6	-0,2696	0,1104	0,4920	0,8721	1,2314	1,5224
7	-0,4652	-0,1477	0,1765	0,5162	0,8742	1,2369
8	-0,5687	-0,3350	-0,0915	0,1792	0,4973	0,8769
9	-0,6289	-0,4869	-0,3328	-0,1423	0,1194	0,4911
10	-0,6768	-0,6280	-0,5652	-0,4577	-0,2567	0,1003
<i>Изгибающий момент M^T</i>						
0	0	0	0	0	0	0
1	-0,0728	0,0199	0,0134	0,0080	0,0040	0,0012
2	-0,1027	-0,0262	0,0517	0,0328	0,0180	0,0072
3	-0,1047	-0,0472	0,0119	0,0752	0,0450	0,0220
4	-0,0908	-0,0513	-0,0103	0,0349	0,0874	0,0490
5	-0,0699	-0,0452	-0,0193	0,0101	0,0460	0,0910
6	-0,0478	-0,0341	-0,0196	-0,0025	0,0196	0,0490
7	-0,0281	-0,0217	-0,0148	-0,0063	0,0054	0,0220
8	-0,0129	-0,0107	-0,0082	-0,0049	-0,0001	0,0072
9	-0,0033	-0,0029	-0,0024	-0,0018	-0,0007	0,0012
10	0	0	0	0	0	0
<i>Поперечная сила Q^T</i>						
0	0 *	0	0	0	0	0
1	-0,4861	0,3840 *	0,2633	0,1620	0,0845	0,0296
2	-0,1363	-0,3214	0,4985 *	0,3353	0,2006	0,0980
3	0,0767	-0,1132	-0,3027	0,5127 *	0,3445	0,2037
4	0,1860	0,0199	-0,1485	-0,3210	0,5055 *	0,3416
5	0,2230	0,0934	-0,0396	-0,1813	-0,3355	0,5000 *
6	0,2136	0,1228	0,0284	-0,0760	-0,1978	-0,3416
7	0,1769	0,1210	0,0619	-0,0066	-0,0925	-0,2037
8	0,1252	0,0968	0,0661	0,0282	-0,0240	-0,0980
9	0,0653	0,0557	0,0449	0,0300	0,0069	-0,0296
10	0	0	0	0	0	0

$$\lambda = 4$$

№ сечения	Точки приложения силы N					
	0	1	2	3	4	5
<i>Реактивное давление p^T</i>						
0	7,9516	4,9423	2,5174	0,8761	-0,0598	-0,4763
1	4,8865	3,7757	2,5396	1,4354	0,6275	0,1258
2	2,4484	2,5144	2,4110	1,9281	1,3007	0,7408
3	0,8160	1,4043	1,9169	2,1500	1,8816	1,3646
4	-0,1031	0,6005	1,2870	1,8768	2,1611	1,9170
5	-0,5028	0,1065	0,7293	1,3594	1,9157	2,1799
6	-0,5801	-0,1434	0,3181	0,9331	1,3966	1,9170
7	-0,4885	-0,2319	0,0493	0,3944	0,9363	1,3646
8	-0,3267	-0,2316	-0,1174	0,0525	0,3255	0,7408
9	-0,1450	-0,1932	-0,2298	-0,2264	-0,1318	0,1258
10	0,0391	-0,1449	-0,3253	-0,4830	-0,5664	-0,4763
<i>Изгибающий момент M^T</i>						
0	0	0	0	0	0	0
1	-0,0654	0,0228	0,0126	0,0053	0,0008	-0,0014
2	-0,0808	-0,0169	0,0504	0,0249	0,0079	-0,0015
3	-0,0704	-0,0311	0,0117	0,0633	0,0279	0,0058
4	-0,0507	-0,0308	-0,0081	0,0223	0,0662	0,0267
5	-0,0311	-0,0240	-0,0149	-0,0003	0,0252	0,0662
6	-0,0160	-0,0156	-0,0142	-0,0093	0,0029	0,0267
7	-0,0065	-0,0085	-0,0100	-0,0098	-0,0055	0,0058
8	-0,0017	-0,0035	-0,0052	-0,0062	-0,0055	-0,0015
9	-0,0001	-0,0008	-0,0015	-0,0020	-0,0021	-0,0014
10	0	0	0	0	0	0
<i>Поперечная сила Q^T</i>						
0	0 *	0	0	0	0	0
1	-0,3581	0,4359 *	0,2528	0,1156	0,0284	-0,0175
2	0,0087	-0,2496	0,5004 *	0,2838	0,1248	0,0258
3	0,1719	-0,0537	-0,2832	0,4877 *	0,2839	0,1311
4	0,2075	0,0466	-0,1230	-0,3110	0,4860 *	0,2952
5	0,1772	0,0819	-0,0222	-0,1492	-0,3101	0,5000 *
6	0,1231	0,0801	0,0302	-0,0396	-0,1445	-0,2952
7	0,0696	0,0613	0,0485	0,0218	-0,0329	-0,1311
8	0,0289	0,0381	0,0451	0,0442	0,0252	-0,0258
9	0,0053	0,0169	0,0278	0,0355	0,0349	-0,0175
10	0	0	0	0	0	0

$$\lambda = 5$$

№ сече- ния	Точка приложения силы N					
	0	1	2	3	4	5
<i>Реактивное давление p^T</i>						
0	9,8937	5,3402	2,0196	0,1672	—0,5770	—0,6843
1	5,2185	4,0639	2,5511	1,2106	0,3412	—0,0893
2	1,8898	2,5059	2,7556	2,1645	1,1286	0,5683
3	0,0740	1,1624	2,1477	2,6466	2,1858	1,3549
4	—0,6283	0,3066	1,2685	2,1798	2,6498	2,1874
5	—0,7045	—0,1082	0,5559	1,3491	2,1859	2,6417
6	—0,5243	—0,2333	0,1210	0,6341	1,3615	2,1874
7	—0,2976	—0,2105	—0,0811	1,7067	0,6372	1,3549
8	—0,1064	—0,1331	—0,1399	—0,0791	0,1273	0,5683
9	0,0438	—0,0450	—0,1337	—0,2092	—0,2257	—0,0893
10	0,1766	0,0424	—0,1100	—0,3011	—0,5214	—0,6843
<i>Изгибающий момент M^T</i>						
0	0	0	0	0	0	0
1	—0,0583	0,0246	0,0110	0,0026	—0,0014	—0,0024
2	—0,0622	—0,0107	0,0469	0,0171	0,0007	—0,0056
3	—0,0447	—0,0205	0,0091	0,0525	0,0156	—0,0030
4	—0,0246	—0,0179	—0,0077	0,0128	0,0517	0,0133
5	—0,0097	—0,0115	—0,0116	—0,0058	0,0126	0,0509
6	—0,0014	—0,0057	—0,0094	—0,0106	—0,0051	0,0133
7	0,0017	—0,0020	—0,0057	—0,0087	—0,0091	—0,0030
8	0,0017	—0,0003	—0,0025	—0,0047	—0,0064	—0,0056
9	0,0007	0,0001	—0,0006	—0,0014	—0,0021	—0,0024
10	0	0	0	0	0	0
<i>Поперечная сила Q^T</i>						
0	0 *	0	0	0	0	0
1	—0,2414	0,4702 *	0,2285	0,0689	—0,0118	—0,0387
2	0,1110	—0,2013	0,4939 *	0,2376	0,0696	—0,0147
3	0,2092	—0,0179	—0,2610	0,4782 *	0,2432	0,0814
4	0,1815	0,0556	—0,0901	—0,2805	0,4850 *	0,2585
5	0,1149	0,0655	0,0011	—0,1040	—0,2733	0,5000 *
6	0,0534	0,0484	0,0349	—0,0049	—0,0959	—0,2585
7	0,0123	0,0262	0,0369	0,0353	0,0041	—0,0814
8	—0,0079	0,0090	0,0259	0,0399	0,0423	0,0147
9	—0,0110	0,0001	0,0122	0,0255	0,0374	0,0387
10	0	0	0	0	0	0

$$\lambda = 6$$

№ сече- ния	Точка приложения силы N					
	0	1	2	3	4	5
<i>Реактивное давление p^T</i>						
0	11,8071	5,4781	1,3560	-0,4487	-0,8247	-0,6133
1	5,2533	4,3068	2,5664	1,0109	0,1304	-0,1935
2	1,1517	2,4975	3,2124	2,4172	1,2106	0,3568
3	-0,5654	0,9482	2,3961	3,1828	2,4219	1,2246
4	-0,8680	0,0947	1,1915	2,4156	3,1288	2,3722
5	-0,6169	-0,2067	0,3461	1,2193	2,3708	3,0931
6	-0,2961	-0,2197	-0,0540	0,3666	1,2028	2,3722
7	-0,0804	-0,1384	-0,1586	-0,0435	0,3690	1,2246
8	-0,0219	-0,0560	-0,1281	-0,1584	-0,0503	0,3568
9	0,0588	0,0060	-0,0581	-0,1412	-0,2186	-0,1935
10	0,0751	0,0573	0,0165	-0,0902	-0,3060	-0,6133
<i>Изгибающий момент M^T</i>						
0	0	0	0	0	0	0
1	-0,0519	0,0254	0,0088	0,0002	-0,0025	-0,0024
2	-0,0472	-0,0071	0,0423	0,0104	-0,0036	-0,0065
3	-0,0269	-0,0143	0,0055	0,0437	0,0078	-0,0064
4	-0,0100	-0,0108	-0,0080	0,0063	0,0424	0,0063
5	-0,0008	-0,0054	-0,0089	-0,0077	0,0060	0,0420
6	0,0023	-0,0016	-0,0057	-0,0039	-0,0075	0,0063
7	0,0023	0,0001	-0,0025	-0,0057	-0,0083	-0,0064
8	0,0013	0,0004	-0,0006	-0,0024	-0,0048	-0,0065
9	0,0003	0,0002	0	-0,0005	-0,0014	-0,0024
10	0	0	0	0	0	0
<i>Поперечная сила Q^T</i>						
0	0 *	0	0	0	0	0
1	-0,1470	0,4892 *	0,1961	0,0281	-0,0347	-0,0403
2	-0,1733	-0,1705	0,4851 *	0,1995	0,0323	-0,0322
3	0,2026	0,0017	-0,0235	0,4795 *	0,2140	0,0469
4	0,1309	0,0539	-0,0551	-0,2406	0,4915 *	0,2267
5	0,0567	0,0483	0,0217	-0,0588	-0,2335	0,5000 *
6	0,0110	0,0270	0,0364	0,0205	-0,0549	-0,2267
7	-0,0078	0,0091	0,0257	0,0366	0,0237	-0,0469
8	-0,0107	-0,0007	0,0114	0,0265	0,0397	0,0322
9	-0,0067	-0,0032	0,0021	0,0116	0,0262	0,0403
10	0	0	0	0	0	0

$$\lambda = 7$$

№ сече- ния	Точка приложения силы N					
	0	1	2	3	4	5
<i>Реактивное давление p^T</i>						
0	13,6867	5,4001	0,6381	—0,8856	—0,8370	—0,4126
1	5,0300	4,5599	2,6006	0,8234	—0,0333	—0,2349
2	0,3561	2,5065	3,7409	2,6175	1,0442	0,1298
3	—1,0065	0,7518	2,5937	3,7068	2,5692	1,0150
4	—0,8575	—0,0640	1,0261	2,5633	3,6142	2,5068
5	—0,3976	—0,2401	0,1221	1,0107	2,5056	3,5794
6	—0,0844	—0,1676	—0,1700	0,1161	0,9917	2,5068
7	0,0380	—0,0676	—0,1639	—0,1732	0,1176	1,0150
8	0,0516	—0,0085	—0,0825	—0,1647	—0,1688	0,1298
9	0,0279	0,0158	—0,0103	—0,0717	—0,1714	—0,2349
10	—0,0019	0,0275	0,0488	0,0291	—0,1011	—0,4126
<i>Изгибающий момент M^T</i>						
0	0	0	0	0	0	0
1	—0,0460	0,0256	0,0065	—0,0016	—0,0028	—0,0018
2	—0,0351	—0,0052	0,0376	0,0052	—0,0056	—0,0056
3	—0,0150	—0,0105	0,0023	0,0370	0,0029	—0,0072
4	—0,0025	—0,0067	—0,0078	0,0022	0,0363	0,0023
5	0,0019	—0,0024	—0,0065	—0,0077	0,0022	0,0362
6	0,0021	—0,0001	—0,0030	—0,0064	—0,0075	0,0023
7	0,0011	0,0005	—0,0007	—0,0030	—0,0063	—0,0072
8	0,0003	0,0004	0,0002	—0,0007	—0,0028	—0,0056
9	0,0000	0,0001	0,0001	—0,0000	—0,0006	—0,0018
10	0	0	0	0	0	0
<i>Поперечная сила Q^T</i>						
0	0 *	0	0	0	0	0
1	—0,0642	0,4980 *	0,1619	—0,0031	—0,0435	—0,0324
2	0,2051	—0,1487	0,4790 *	0,1689	0,0070	—0,0376
3	0,1726	0,0142	—0,2043	0,4852 *	0,1877	0,0196
4	0,0794	0,0486	—0,0233	—0,2013	0,4969 *	0,1957
5	0,0167	0,0334	0,0341	—0,0226	—0,1971	0,5000 *
6	—0,0074	0,0130	0,0317	0,0337	—0,0223	—0,1957
7	—0,0098	0,0013	0,0150	0,0308	0,0332	—0,0196
8	—0,0053	—0,0025	0,0027	0,0139	0,0306	0,0376
9	—0,0013	—0,0022	—0,0019	—0,0021	0,0136	0,0324
10	0	0	0	0	0	0

Таблицы
для балок, нагруженных сосредоточенными моментами

Таблица 19

$$\lambda = 1$$

№ сече- ния	Точка приложения момента M					
	0	1	2	3	4	5
<i>Реактивное давление p^T</i>						
0	6,2047	6,1885	6,1468	6,0921	6,0343	5,9809
1	4,8770	4,8802	4,8758	4,8546	4,8252	4,7946
2	3,5880	3,5906	3,6036	3,6158	3,6149	3,6070
3	2,3346	2,3367	2,3469	2,3726	2,4002	2,4152
4	1,1123	1,1139	1,1214	1,1407	1,1769	1,2147
5	-0,0843	-0,0833	-0,0784	-0,0655	-0,0407	0
6	-1,2611	-1,2606	-1,2583	-1,2519	-1,2384	-1,2147
7	-2,4239	-2,4240	-2,4243	-2,4242	-2,4220	-2,4152
8	-3,5782	-3,5788	-3,5817	-3,5879	-3,5970	-3,6070
9	-4,7282	-4,7294	-4,7349	-4,7474	-4,7677	-4,7946
10	-5,8770	-5,8788	-5,8869	-5,9057	-5,9371	-5,9809
<i>Изгибающий момент M^T</i>						
0	0 *	0	0	0	0	0
1	-0,9712	0,0288 *	0,0286	0,0284	0,0282	0,0279
2	-0,8935	-0,8936	0,1060 *	0,1053	0,1046	0,1038
3	-0,7800	-0,7801	-0,7806	0,2184 *	0,2171	0,2157
4	-0,6430	-0,6431	-0,6436	-0,6447	0,3536 *	0,3518
5	-0,4948	-0,4949	-0,4954	-0,4969	-0,4980	0,5000 *
6	-0,3475	-0,3476	-0,3479	-0,3488	-0,3501	-0,3518
7	-0,2127	-0,2128	-0,2130	-0,2136	-0,2145	-0,2157
8	-0,1022	-0,1022	-0,1024	-0,1027	-0,1031	-0,1038
9	-0,0275	-0,0275	-0,0275	-0,0276	-0,0277	-0,0279
10	0	0	0	0	0	0
<i>Поперечная сила Q^T</i>						
0	0	0	0	0	0	0
1	0,5541	0,5534	0,5511	0,5473	0,5430	0,5388
2	0,9773	0,9770	0,9751	0,9709	0,9650	0,9589
3	1,2735	1,2733	1,2726	1,2703	1,2657	1,2600
4	1,4458	1,4459	1,4460	1,4459	1,4446	1,4415
5	1,4972	1,4974	1,4982	1,4997	1,5014	1,5022
6	1,4299	1,4302	1,4314	1,4338	1,4374	1,4415
7	1,2457	1,2460	1,2472	1,2500	1,2544	1,2600
8	0,9456	0,9458	0,9469	0,9494	0,9535	0,9589
9	0,5303	0,5304	0,5311	0,5327	0,5352	0,5388
10	0	0	0	0	0	0

$$\lambda = 2$$

№ сече- ния	Точна приложения момента M					
	0	1	2	3	4	5
<i>Реактивное давление p^T</i>						
0	9,0168	8,7647	8,1254	7,3057	6,4609	5,6994
1	5,8971	5,9523	5,8957	5,5837	5,1555	4,7148
2	3,3888	3,4317	3,6392	3,8371	3,8280	3,7104
3	1,4291	1,4607	1,6158	2,009	2,4270	2,6396
4	-0,0670	-0,0456	0,0617	0,3406	0,8764	1,4318
5	-1,1945	-1,1822	-1,1180	-0,9439	-0,5948	0
6	-2,0487	-2,0445	-2,0191	-1,9405	-1,7638	-1,4318
7	-2,7175	-2,7207	-2,7309	-2,7403	-2,7241	-2,6396
8	-3,2762	-3,2863	-3,3297	-3,4223	-3,5584	-3,7104
9	-3,7826	-3,7993	-3,8750	-4,0481	-4,3322	-4,7148
10	-4,2738	-4,2971	-4,4046	-4,6574	-5,0881	-5,6994
<i>Изгибающий момент M^T</i>						
0	0 *	0	0	0	0	0
1	-0,9601	0,0391 *	0,0369	0,0337	0,0301	0,0269
2	-0,8602	-0,8617	0,1327 *	0,1231	0,1118	0,1008
3	-0,7256	-0,7273	-0,7347	0,2508 *	0,2316	0,2118
4	-0,5758	-0,5776	-0,5851	-0,6011	0,3754 *	0,3489
5	-0,4261	-0,4277	-0,4343	-0,4490	-0,4719	0,5000 *
6	-0,2879	-0,2891	-0,2943	-0,3059	-0,3246	-0,3489
7	-0,1699	-0,1707	-0,1741	-0,1819	-0,1946	-0,2118
8	-0,0789	-0,0793	-0,0810	-0,0850	-0,0917	-0,1008
9	-0,0206	-0,0207	-0,0211	-0,0223	-0,0242	-0,0269
10	0	0	0	0	0	0
<i>Поперечная сила Q^T</i>						
0	0	0	0	0	0	0
1	0,7457	0,7359	0,7011	0,6445	0,5808	0,5207
2	1,2100	1,2051	1,1778	1,1155	1,0300	0,9420
3	1,4509	1,4497	1,4405	1,4078	1,3427	1,2595
4	1,5190	1,5204	1,5244	1,5254	1,5079	1,4630
5	1,4559	1,4590	1,4716	1,4952	1,5220	1,5346
6	1,2938	1,2977	1,3147	1,3510	1,4041	1,4630
7	1,0554	1,0594	1,0772	1,1169	1,1797	1,2595
8	0,7558	0,7591	0,7742	0,8088	0,8655	0,9420
9	0,4028	0,4048	0,4140	0,4353	0,4710	0,5207
10	0	0	0	0	0	0

$$\lambda = 3$$

№ Сечения	Точка приложения момента М					
	0	1	2	3	4	5
<i>Реактивное давление p^T</i>						
0	17,7377	16,5575	13,7134	10,3536	7,1863	4,5828
1	8,5336	8,8557	8,7520	7,5591	5,9588	4,3913
2	2,3080	2,5230	3,5716	4,5916	4,6055	4,1148
3	-1,4524	-1,3247	-0,6718	1,0626	2,8279	3,5391
4	-3,3555	-3,2932	-2,9455	-1,9410	0,1818	2,3190
5	-3,9775	-3,9601	-3,8307	-3,3711	-2,2419	0
6	-3,7958	-3,8074	-3,8242	-3,7488	-3,3602	-2,3190
7	-3,1659	-3,1951	-3,3063	-3,4946	-3,6474	-3,5391
8	-2,3239	-2,3637	-2,5371	-2,9130	-3,4759	-4,1148
9	-1,4048	-1,4520	-1,6721	-2,1974	-3,1034	-4,3913
10	-0,4693	-0,5229	-0,7851	-1,4484	-2,6769	-4,5828
<i>Изгибающий момент M^T</i>						
0	0 *	0	0	0	0	0
1	-0,9267	0,0700 *	0,0603	0,0471	0,0339	0,0226
2	-0,7630	-0,7693	0,2078 *	0,1695	0,1272	0,0990
3	-0,5722	-0,5791	-0,6075	0,3369 *	0,2658	0,1960
4	-0,3928	-0,3990	-0,4262	-0,4842	0,4312 *	0,3373
5	-0,2448	-0,2498	-0,2721	-0,3221	-0,4012	0,5000 *
6	-0,1352	-0,1387	-0,1547	-0,1919	-0,2538	-0,3373
7	-0,0629	-0,0650	-0,0748	-0,0982	-0,1386	-0,1960
8	-0,0218	-0,0228	-0,0275	-0,0389	-0,0591	-0,0890
9	-0,0039	-0,0042	-0,0054	-0,0085	-0,0141	-0,0226
10	0	0	0	0	0	0
<i>Поперечная сила Q^T</i>						
0	0	0	0	0	0	0
1	1,3136	1,2707	1,1233	0,8956	0,6573	0,4487
2	1,8556	1,8396	1,7394	1,5032	1,1855	0,8740
3	1,8984	1,8995	1,8844	1,7859	1,5571	1,2567
4	1,6580	1,6686	1,7036	1,7420	1,7076	1,5496
5	1,2914	1,3060	1,3648	1,4764	1,6046	1,6656
6	0,9027	0,9176	0,9820	1,1204	1,3245	1,5496
7	0,5546	0,5675	0,6255	0,7582	0,9741	1,2567
8	0,2801	0,2895	0,3333	0,4378	0,6180	0,8740
9	0,0937	0,0987	0,1229	0,1823	0,2890	0,4487
10	0	0	0	0	0	0

$$\lambda = 4$$

№ сече- ния	Точка приложения момента M					
	0	1	2	3	4	5
<i>Реактивное давление p^T</i>						
0	31,2088	27,8610	20,3743	12,6287	6,4262	2,2373
1	10,7223	11,8807	12,1621	9,6790	6,4862	3,6660
2	-0,8716	-0,2380	2,9440	6,0511	6,1611	4,9247
3	-5,9699	-5,7103	-4,2153	0,2014	4,4669	5,4915
4	-7,0464	-7,0127	-6,6047	-4,8603	-0,1758	4,3587
5	-6,0674	-6,1442	-6,3198	-6,1648	-4,6123	0
6	-4,3303	-4,4417	-4,8485	-5,4577	-5,6753	-4,3587
7	-2,5315	-2,6349	-3,0628	-3,9050	-4,9273	-5,4915
8	-0,9259	-1,0016	-1,3464	-2,1360	-3,3968	-4,9247
9	-0,4956	0,4543	0,2319	-0,3862	-1,6279	-3,6660
10	1,8417	1,8360	1,7447	1,3283	0,1766	-2,2373
<i>Изгибающий момент M^T</i>						
0	0 *	0	0	0	0	0
1	-0,8781	0,1127 *	0,0882	0,0582	0,0322	0,0136
2	-0,6342	-0,6494	0,2963 *	0,2121	0,1287	0,0635
3	-0,3881	-0,4028	-0,4627	0,4228 *	0,2845	0,1615
4	-0,1950	-0,2063	-0,2559	-0,3632	0,4800 *	0,3117
5	-0,0690	-0,0764	-0,1107	-0,1915	-0,3259	0,5000 *
6	-0,0024	-0,0065	-0,0267	-0,0781	-0,1723	-0,3117
7	0,0210	0,0192	0,0093	-0,0179	-0,0724	-0,1615
8	0,0188	0,0182	0,0146	0,0036	-0,0205	-0,0635
9	0,0070	0,0069	0,0062	0,0038	-0,0021	-0,0136
10	0	0	0	0	0	0
<i>Поперечная сила Q^T</i>						
0	0	0	0	0	0	0
1	2,0966	1,9871	1,6268	1,1154	0,6456	0,2952
2	2,5891	2,5692	2,3821	1,9019	1,2780	0,7247
3	2,2470	2,2718	2,3186	2,2145	1,8094	1,2455
4	1,5962	1,6357	1,7776	1,9816	2,0239	1,7380
5	0,9405	0,9778	1,1313	1,4303	1,7845	1,9560
6	0,4206	0,4485	0,5729	0,8492	1,2701	1,7380
7	0,0775	0,0947	0,1774	0,3811	0,7400	1,2455
8	-0,0953	-0,0871	-0,0431	0,0790	0,3238	0,7247
9	-0,1169	-0,1145	-0,0988	-0,0471	0,0726	0,2952
10	0	0	0	0	0	0

$$\lambda = 5$$

№ сече- ния	Точка приложения момента M					
	0	1	2	3	4	5
<i>Реактивное давление p^T</i>						
0	47,9693	40,6688	25,5801	12,1977	3,5276	-0,7612
1	10,5336	13,5694	15,2089	11,1958	6,3057	2,5761
2	-6,6002	-5,2843	1,7619	8,4811	8,3972	5,8160
3	-10,9751	-10,7008	-8,4335	-0,0915	6,6584	8,2088
4	-9,2832	-9,4821	-9,6921	-7,9439	0,0273	6,6065
5	-5,8570	-6,1747	-7,2560	-8,5202	-7,5648	0
6	-2,8212	-3,0895	-4,1801	-6,2102	-8,1959	-6,6065
7	-0,8148	-0,9835	-1,7487	-3,4583	-5,9649	-8,2088
8	0,2912	0,2187	-0,1631	-1,1869	-3,1046	-5,8160
9	0,8849	0,8938	0,8643	0,5740	-0,3987	-2,5761
10	1,3142	1,3970	1,6967	2,1225	2,1529	0,7612
<i>Изгибающий момент M^T</i>						
0	0 *	0	0	0	0	0
1	-0,8225	0,1582 *	0,1106	0,0593	0,0223	0,0018
2	-0,5059	-0,5342	0,3682 *	0,2277	0,1064	0,0291
3	-0,2340	-0,2570	-0,3512	0,4712 *	0,2699	0,1132
4	-0,0618	-0,0758	-0,1400	-0,2850	0,4984 *	0,2744
5	0,0205	0,0141	-0,0196	-0,1086	-0,2727	0,5000 *
6	0,0436	0,0418	0,0293	-0,0125	-0,1079	-0,2744
7	0,0368	0,0371	0,0354	0,0221	-0,0203	-0,1132
8	0,0203	0,0209	0,0225	0,0214	0,0088	-0,0291
9	0,0059	0,0061	0,0071	0,0080	0,0065	-0,0018
10	0	0	0	0	0	0
<i>Поперечная сила Q^T</i>						
0	0	0	0	0	0	0
1	2,9251	2,7119	2,0395	0,1697	0,4917	0,0907
2	3,1218	3,1262	2,8880	2,1535	1,2268	0,5103
3	2,2431	2,3269	2,5544	2,5730	2,0296	1,2116
4	1,2301	1,3178	1,6481	2,1712	2,4139	2,0023
5	0,4731	0,5349	0,8007	1,3480	2,0370	2,3827
6	0,0392	0,0717	0,2289	0,6115	1,2490	2,0023
7	-0,1426	-0,1319	-0,0675	0,1281	0,5409	1,2116
8	-0,1688	-0,1702	-0,1631	-0,1042	0,0875	0,5103
9	-0,1100	-0,1145	-0,1280	-0,1348	-0,0877	0,0907
10	0	0	0	0	0	0

$$\lambda = 6$$

№ сечения	Точка приложения момента M					
	0	1	2	3	4	5
<i>Реактивное давление p^T</i>						
0	67,7867	54,2986	28,5526	9,2938	-0,3078	-3,1256
1	7,3100	13,7745	18,1966	12,3163	5,6191	1,3386
2	-14,1562	-12,0611	0,5797	12,1504	10,8738	6,1678
3	-15,1097	-15,1893	-12,9776	0,0616	11,9574	10,8546
4	-9,3884	-10,1046	-11,9782	-11,6090	0,2963	11,7264
5	-3,8922	-4,5209	-6,9131	-10,6065	-11,4020	0
6	-0,6464	-1,0007	-2,6153	-6,1271	-10,5781	-11,7264
7	0,6238	0,4932	-0,2503	-2,3415	-6,2117	-10,8546
8	0,7811	0,7758	0,6156	-0,1677	-2,2796	-6,1678
9	0,5104	0,5644	0,7391	0,8926	0,5039	-1,3386
10	0,1483	0,2389	0,6546	1,5679	2,7494	3,1256
<i>Изгибающий момент M^T</i>						
0	0 *	0	0	0	0	0
1	-0,7619	0,2040 *	0,1255	0,0515	0,0083	-0,0032
2	-0,3856	-0,4299	0,4209 *	0,2209	0,1717	-0,0024
3	-0,1167	-0,1465	-0,2712	0,4918 *	0,2369	0,0649
4	0,0122	-0,0012	-0,0688	-0,2359	0,5005 *	0,2343
5	0,0468	0,0437	0,0206	-0,0585	-0,2331	0,5000 *
6	0,0388	0,0401	0,0396	0,0185	-0,0598	-0,2343
7	0,0210	0,0231	0,0292	0,0332	0,0136	-0,0649
8	0,0076	0,0089	0,0139	0,0217	0,0242	0,0024
9	0,0013	0,0017	0,0034	0,0067	0,0100	0,0082
10	0	0	0	0	0	0
<i>Поперечная сила Q^T</i>						
0	0	0	0	0	0	0
1	3,7548	3,4037	2,3375	1,0805	0,2656	-0,0894
2	3,4125	3,4893	3,2763	2,3038	1,0902	0,2860
3	1,9492	2,1268	2,6564	2,9144	2,2318	1,1371
4	0,7243	0,8621	1,4086	2,3371	2,8445	2,2661
5	0,0603	0,1308	0,4640	1,2263	2,2892	2,8525
6	-0,1666	-0,1452	-0,0124	0,3896	1,1902	2,2661
7	-0,1678	-0,1706	-0,1557	-0,0338	0,3507	1,1371
8	-0,0975	-0,1072	-0,1374	-0,1593	-0,0739	0,2860
9	-0,0329	-0,0402	-0,0697	-0,1230	-0,1627	-0,0894
10	0	0	0	0	0	0

$$\lambda = 7$$

№ сече- ния	Точка приложения момента М					
	0	1	2	3	4	5
<i>Реактивное давление p^T</i>						
0	90,2681	68,0632	28,9367	4,7606	-3,7246	-4,0516
1	0,7264	12,6498	21,5576	13,2153	4,5964	0,1493
2	-22,3793	-19,7542	-0,1465	17,0102	13,0055	5,6014
3	-17,2399	-18,2686	-17,6916	0,3824	16,8947	12,7938
4	-7,4519	-8,9028	-13,4450	-16,1346	0,3413	16,4644
5	-1,2930	-2,1374	-5,7472	-12,3983	-16,1660	0
6	0,9232	0,6488	-0,9506	-5,3562	-12,4750	-16,4644
7	1,0544	1,0612	0,7592	-0,9308	-5,4805	-12,7938
8	0,5753	0,6525	0,8376	0,6823	-0,9784	-5,6014
9	0,1015	0,1598	0,4051	0,8440	1,0506	-0,1493
10	-0,3010	-0,2816	-0,0940	0,6106	2,1474	4,0516
<i>Изгибающий момент M^T</i>						
0	0 *	0	0	0	0	0
1	-0,6979	0,2480 *	0,1324	0,0379	-0,0048	-0,0133
2	-0,2778	-0,3392	0,4565 *	0,2002	0,0366	-0,0229
3	-0,0344	-0,0675	-0,2140	0,4985 *	0,2005	0,0263
4	0,0443	0,0347	-0,0250	-0,1991	0,4992 *	0,1976
5	0,0425	0,0435	0,0352	-0,0244	-0,1985	0,5000 *
6	0,0211	0,0244	0,0332	0,0319	-0,0243	-0,1976
7	0,0055	0,0077	0,0165	0,0303	0,0307	-0,0263
8	-0,0005	0,0003	0,0047	0,0147	0,0268	0,0229
9	-0,0008	-0,0007	0,0040	0,0034	0,0089	0,0133
10	0	0	0	0	0	0
<i>Поперечная сила Q^T</i>						
0	0	0	0	0	0	0
1	4,5497	4,0357	2,5247	0,8988	0,0436	-0,1951
2	3,4671	3,6804	3,5953	2,4101	0,9237	0,0924
3	1,4861	1,7793	2,7034	3,2797	2,4187	1,0122
4	0,2515	0,4207	1,1465	2,4921	3,2805	2,4751
5	-0,1857	-0,1313	0,1869	1,0654	2,4893	3,2983
6	-0,2042	-0,2057	-0,1480	0,1777	1,0572	2,4751
7	-0,1053	-0,1202	-0,1575	-0,1366	0,1594	1,0122
8	-0,0239	-0,0345	-0,0777	-0,1490	-0,1635	0,0924
9	0,0100	0,0061	-0,0156	-0,0727	-0,1599	-0,1951
10	0	0	0	0	0	0

Балка переменной жесткости и другие случаи расчета балок

Расчет балки переменной жесткости, лежащей на упругом основании переменной жесткости, методом начальных параметров не представляет принципиальных затруднений. Пролет балки делится на ряд участков для каждой точки разбиения записывается выражение прогибов, которое приравнивается к соответствующим осадкам поверхности основания. При этом изменение

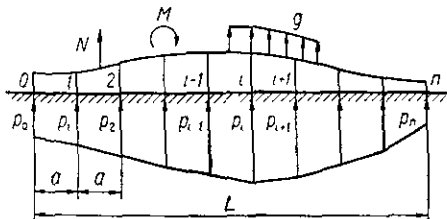


Рис. 22. Балка переменной жесткости на упругом основании с переменным коэффициентом жесткости.

жесткости по длине каждого участка предполагается постоянным, т. е. рассматривается балка ступенчато-переменной жесткости. Криволинейный характер изменения жесткости приводится к ступенчатому, что при достаточно большом числе участков не сказывается на точности результатов расчета.

Алгоритм расчета балок, основанный на указанном методе, для самого общего случая балки переменной жесткости, лежащей на упругом основании с переменным коэффициентом жесткости и с участками разной длины, приведен в работе [22]. Полученные формулы коэффициентов и свободных членов имеют довольно сложный вид, что обусловлено, главным образом, различием длин участков, на которые разбивается балка при расчете. В ряде случаев может оказаться целесообразной разбивка пролета балки на участки одинаковой длины. Для таких случаев приводим более простое решение, в котором использован метод конечных разностей.

За исходное уравнение принято дифференциальное уравнение изгиба балки с учетом деформаций сдвига [39]

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{p + g}{GF}. \quad (62)$$

Здесь реактивные давления p и активная нагрузка g считаются направленными вверх (рис. 22).

Пусть балка имеет n участков равной длины a , занумерованных от 0 до n .

Пользуясь формулой (41 а) и заменив прогибы на погонные интенсивности реакций основания и коэффициенты жесткости, для i -го сечения получим выражение

$$\frac{p_{i-1}}{K_{i-1}} - 2 \frac{p_i}{K_i} + \frac{p_{i+1}}{K_{i+1}} = -\frac{a^2}{EI_i} M_i + \frac{p_i + g_i}{GF_i} a^3. \quad (63)$$

Двигаясь от левого конца балки к правому, запишем выражения изгибающих моментов для сечений 1, 2, ..., $n - 1$:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{a^2}{6} (2p_0 + p_1) + M_{1B}; \\ M_2 &= \frac{a^2}{6} (5p_0 + 6p_1 + p_2) + M_{2B}; \\ M_3 &= \frac{a^2}{6} (8p_0 + 12p_1 + 6p_2 + p_3) + M_{3B}; \\ M_4 &= \frac{a^2}{6} (11p_0 + 18p_1 + 12p_2 + 6p_3 + p_4) + M_{4B}; \\ &\dots \\ M_i &= \frac{a^2}{6} \left[(3i-1)p_0 + 6 \sum_{j=1}^{i-1} (i-j)p_j + p_i \right] + M_{iB}, \end{aligned} \quad (64)$$

Составляя уравнение (63) последовательно для сечений 1, 2, 3, ..., $n - 1$ и учитывая формулы (64), будем иметь ряд следующих уравнений:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2a^4}{6EI_1} + \frac{1}{K_0} \right) p_0 + \left(\frac{a^4}{6EI_1} - \frac{2}{K_1} - \frac{1}{GF_1} \right) p_1 + \\ & + \frac{p_2}{K_2} = - \frac{a^2 M_{1B}}{EI_1} + \frac{g_1 a^2}{GF_1}; \\ & \frac{5a^4}{6EI_2} p_0 + \left(\frac{6a^4}{6EI_2} + \frac{1}{K_1} \right) p_1 + \left(\frac{a^4}{6EI_2} - \frac{2}{K_2} - \frac{1}{GF_2} \right) p_2 + \\ & + \frac{p_3}{K_3} = - \frac{a^2 M_{2B}}{EI_2} + \frac{g_2}{GF_2} \quad \text{и т. д.,} \end{aligned} \quad (R_5)$$

Вводя обозначения

$$\gamma_r = \frac{6EI_r}{K_a a^3} \text{ и } \psi_r = \frac{6EI_r}{a^2 GF_*}, \quad (66)$$

75

Система уравнений для расчета свободно лежащей балки

№ уравнения	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
1	$2 + \gamma_{10}$	$1 - 2\gamma_{11} - \psi_1$	γ_{12}		
2	5	$6 + \gamma_{21}$	$1 - 2\gamma_{22} - \psi_2$	γ_{23}	
3	8	12	$6 + \gamma_{32}$	$1 - 2\gamma_{33} - \psi_3$	γ_{34}
4	11	18	12	$6 + \gamma_{43}$	$1 - 2\gamma_{44} - \psi_4$
5	14	24	18	12	$6 + \gamma_{54}$
6	17	30	24	18	12
7	20	36	30	24	18
8	1	2	2	2	2
9	23	42	36	30	24

ва участков $n > 8$. Заметим, что последние два уравнения идентичны уравнениям равновесия, примененным при расчете балки постоянной жесткости методом начальных параметров (см. табл. 5).

В случае, если изгибная и сдвиговая жесткости какого-либо сечения i балки могут считаться равными бесконечности, то, подставляя в уравнение (65) $EI_i = \infty$, $GF_i = \infty$, получим

$$\frac{p_{i-1}}{K_{i-1}} - 2 \frac{p_i}{K_i} + \frac{p_{i+1}}{K_{i+1}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (67)$$

Например, пусть в балке, система расчетных уравнений которой приведена в табл. 26, жесткости сечения 4 равны бесконечности. Тогда вместо уравнения 4 (табл. 26) следует написать такое уравнение

$$\frac{1}{K_3} p_3 - \frac{2}{K_4} p_4 + \frac{1}{K_5} p_5 = 0.$$

p_3	p_4	p_7	p_8	Свободные члены (в правой части)
				$-\frac{6}{a^2} M_{1B} + g_1 \psi_1$
				$-\frac{6}{a^2} M_{2B} + g_2 \psi_2$
				$-\frac{6}{a^2} M_{3B} + g_3 \psi_3$
γ_{45}				$-\frac{6}{a^2} M_{4B} + g_4 \psi_4$
$1 - 2\gamma_{55} - \psi_5$	γ_{56}			$-\frac{6}{a^2} M_{5B} + g_5 \psi_5$
$6 + \gamma_{65}$	$1 - 2\gamma_{66} - \psi_6$	γ_{67}		$-\frac{6}{a^2} M_{6B} + g_6 \psi_6$
12	$6 + \gamma_{75}$	$1 - 2\gamma_{77} - \psi_7$	γ_{78}	$-\frac{6}{a^2} M_{7B} + g_7 \psi_7$
2	2	2	1	$-\frac{2}{a} \Sigma Y_B$
18	12	6	1	$-\frac{6}{a^2} \Sigma M_{\text{шв}}$

В случае скачкообразного изменения момента инерции балки следует находить значение приведенных моментов инерции ближайших занумерованных сечений. При расположении скачка между занумерованными сечениями (рис. 23, а) имеем формулы [19]

$$I_{i, \text{пр}} = \frac{2aI_{i-1}I_{i+1}}{dI_{i-1} + (a+c)I_{i+1}}; \quad (68)$$

$$I_{i+1, \text{пр}} = \frac{2aI_iI_{i+2}}{cI_{i+2} + (a+d)I_i}. \quad (69)$$

Если скачок совпадает с границей двух участков (рис. 23, б), то

$$I_{i, \text{пр}} = \frac{2I_{i-1}I_{i+1}}{I_{i-1} + I_{i+1}}. \quad (70)$$

Приведенные площади поперечных сечений вычисляются по таким же формулам, поэтому для их определения в формулах (68)—(70) следует заменить лишь момент инерции I площадью F .

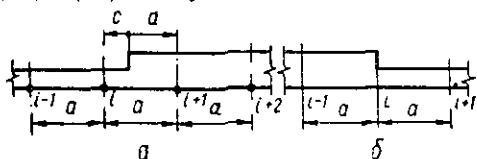


Рис. 23. Примеры расположения мест изменения момента инерции балки:

a — между занумерованными сечениями; b — в занумерованном сечении.

После определения погонных интенсивностей реакций основания $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ (из решения системы уравнений табл. 26) вычисляются значения изгибающих моментов в сечениях 1, 2, ..., $n-1$ по формулам (64). Поперечные силы подсчитываются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{a}{2} (p_0 + p_1) + Q_{1в}; \\ Q_2 &= \frac{a}{2} (p_0 + 2p_1 + p_2) + Q_{2в}; \\ Q_3 &= \frac{a}{2} (p_0 + 2p_1 + 2p_2 + p_3) + Q_{3в}; \\ &\dots \dots \dots \\ Q_i &= \frac{a}{2} \left(p_0 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} p_j + p_i \right) + Q_{iв}, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

где $Q_{iв}$ — поперечная сила в сечении i от внешней нагрузки.

Прогибы балки, как обычно, определяются по формуле

$$y_i = \frac{p_i}{K_i}.$$

Для оценки погрешности расчета и выбора шага a , дающего требуемую точность решения, можно воспользоваться тем же приемом, который применен нами в методе начальных параметров [22]. Расчет выполняется дважды: вначале с шагом a , а затем с вдвое меньшим шагом $a' = \frac{a}{2}$. Если расхождения между значениями p или M обоих расчетов не превышают допустимой погрешности, то шаг a достаточен. В противном случае уменьшают в два раза шаг a' , который принимают за исходный.

В практике проектирования встречаются балки, имеющие в пролете ряд шарнирно неподвижных или податливых сосредоточенных опор, случаи шарнирно соединенных балок и др. Подобные задачи можно решать с использованием канонической формы метода сил. В качестве основной системы или ее элемента принимается какая-либо из балок, изображенных на рис. 14, 16—20. Для такой балки легко находятся линейные и угловые деформации любого сечения от грузовых и единичных воздействий. В местах сосредото-

вестными будут только три значения погонных интенсивностей реакций в точках 0, 1 и 2 ($p_0 = p_4$, $p_1 = p_3$).

Расчетные уравнения для этого случая имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (41 + \beta_0) p_0 + (28 - 2\beta_1) p_1 + (1 + \beta_2) p_2 &= B_1; \\ 2(91 + \beta_0) p_0 + (178 - 2\beta_1) p_1 + 30p_2 &= B_2; \\ p_0 + 2p_1 + p_2 &= -\frac{2}{a} \sum Y_{\text{в}}. \end{aligned} \right\}$$

По формулам (48) находим численные величины параметров β , β_0 , β_1 и β_2 :

$$\beta = \frac{120EI}{a^4} = \frac{120 \cdot 7,54 \cdot 10^6}{15^4} = 17872,59;$$

$$\beta_0 = \frac{\beta}{K_0} = \frac{17872,59}{2000} = 8,94;$$

$$\beta_1 = \frac{\beta}{K_1} = \frac{17872,59}{2750} = 6,50;$$

$$\beta_2 = \frac{\beta}{K_2} = \frac{17872,59}{3000} = 5,96.$$

Чтобы оценить влияние каждой из нагрузок, свободные члены определяем отдельно для равномерно распределенной нагрузки g и сосредоточенной силы N .

Учитывая, что в данном случае нагрузка постоянна по длине балки ($g_1 = g_2 = \dots = g$) и $\eta = 0$, по формулам (51) находим

$$B_{1g} = -70 \cdot g = -70 \cdot (-10) = 700 \text{ т/м},$$

$$B_{2g} = -390 \cdot g = -390 \cdot (-10) = 3900 \text{ т/м}.$$

Пользуясь формулами (52) и принимая во внимание, что $N_0 = N_1 = 0$, получим

$$B_{1N} = 0;$$

$$B_{2N} = -\frac{2}{a} 10N_2 = -\frac{2}{15} 10(-100) = 133,33 \text{ т/м}.$$

Свободные члены уравнений равновесия определяются с учетом нагрузки, расположенной на одной половине балки:

$$-\frac{2}{a} \sum Y_{\text{в}g} = -\frac{2}{a} g 2a = -\frac{2}{a} (-10) \cdot 2a = 40 \text{ т/м};$$

$$-\frac{2}{a} \sum Y_{\text{в}N} = -\frac{2}{a} \frac{N_2}{2} = -\frac{2 \cdot (-100)}{15 \cdot 2} = 6,67 \text{ т/м}$$

Система уравнений с численными коэффициентами приведена в табл. 27.

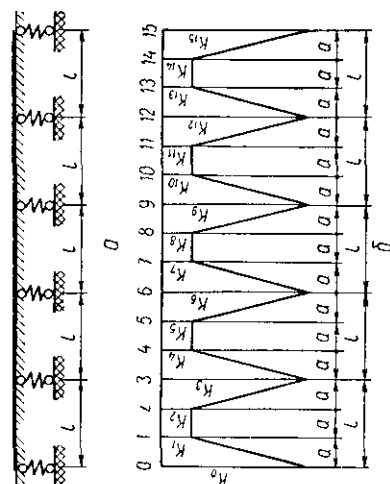


Рис. 24. Схема балки, опертой на непрерывное основание п сваях:
 а — расчетная схема с сосредоточенными упругими опорами, б — расчетная эпюра коэффициентов жесткости.

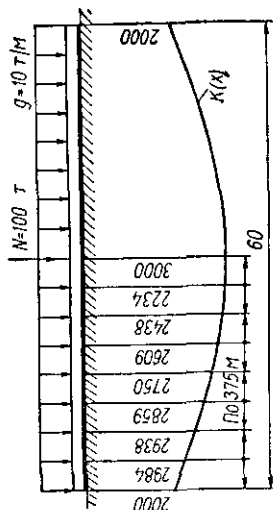


Рис. 25. Расчетная схема балки к примеру 1.

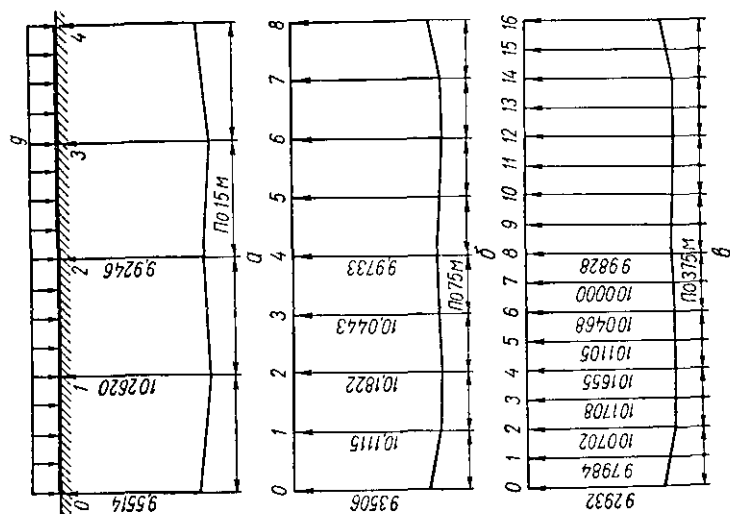


Рис. 26. Эпюры реактивных давлений в случае равномерно распределенной нагрузки:
 а — при $n = 4$, б — при $n = 8$, в — при $n = 16$

Система уравнений

№ уравнения	p_0	p_1	p_2	Свободные члены (в правой части)	
				B_g	B_N
1	49,94	15,00	6,96	700	0
2	199,87	165,00	30,00	3900	133,33
3	1,00	2,00	1,00	40	6,67

Решая эти уравнения относительно неизвестных p_0 , p_1 , p_2 , будем иметь

$$\begin{aligned} p_{0g} &= 9,5514 \text{ т/м}; & p_{0N} &= -1,1092 \text{ т/м}; \\ p_{1g} &= 10,2620 \text{ »}; & p_{1N} &= 1,1586 \text{ »}; \\ p_{2g} &= 9,9246 \text{ »}; & p_{2N} &= 5,4620 \text{ »}. \end{aligned}$$

Вертикальные перемещения балки в точках 0, 1, 2 определяют по элементарным формулам:

$$y_{0g} = \frac{p_{0g}}{K_0} = \frac{9,5514}{2000} = 0,0048 \text{ м}; \quad y_{0N} = -\frac{1,1092}{2000} = -0,00056 \text{ м};$$

$$y_{1g} = \frac{p_{1g}}{K_1} = \frac{10,2620}{2750} = 0,0037 \text{ м};$$

$$y_{1N} = \frac{1,1586}{2750} = 0,00042 \text{ м};$$

$$y_{2g} = \frac{p_{2g}}{K_2} = \frac{9,9246}{3000} = 0,0033 \text{ м};$$

$$y_{2N} = \frac{5,4620}{3000} = 0,00182 \text{ м}.$$

Изгибающие моменты и поперечные силы в любом сечении балки определяются как для статически определимой балки, находящейся в равновесии под действием активной нагрузки g и N и реактивных давлений основания p . Для определения M и Q в точках деления балки на участки удобно пользоваться формулами (64) и (71). Здесь ограничимся вычислением наибольшего изгибающего момента в сечении 2.

Подставляя во вторую из формул (64) численные значения реакций и нагрузок, находим значения момента от нагрузок g и N :

$$\begin{aligned} M_{2g} &= \frac{15^2}{6} (5 \cdot 9,5514 + 6 \cdot 10,2620 + 9,9246) - \frac{10(2 \cdot 15)^2}{2} = \\ &= -28,00 \text{ тм}; \end{aligned}$$

$$M_{2N} = \frac{15^2}{6} (-5 \cdot 1,1092 + 6 \cdot 1,1586 + 5,4620) = 257,54 \text{ тм}.$$

При выполнении такого расчета естественно возникает вопрос, достаточна ли точность полученного решения? Может быть деление балки на 4 участка дает слишком грубое приближение к точному решению?

Для оценки точности решения балку необходимо рассчитать вторично, но при удвоенном числе участков. Если полученные в первом и втором случаях величины наибольших изгибающих моментов расходятся между собой не более, чем на 10—15 %, то точность первого решения можно считать достаточной для практических целей. Это значит, что подобного рода балки можно в дальнейшем делить при расчете всего, например, на 4 участка, а не на большее количество.

Исследуем с этой точки зрения рассмотренный пример. Для этого рассчитаем балку при 8-ми и 16-ти участках ($a_8 = 7,5$ м, $a_{16} = 3,75$ м). Поскольку техника расчета совершенно одинакова как при 4-х, так и при большем количестве участков, приводить подсчеты для 8-ми и 16-ти участков не будем. Конечные результаты расчетов в виде эюр реактивных давлений представлены на рис. 26 и 27. Сопоставление величин изгибающих моментов в среднем сечении дано в табл. 28.

Из табл. 28 видно, что ошибка при использовании 4 участков достигает 10,4% для равномерно распределенной нагрузки; при действии сосредоточенной силы ошибка незначительна. Учитывая приближенность значений коэффициентов жесткости основания и изгибной жесткости балки, можно полагать, что точность расчета при 4 участках и в случае действия равномерно распределенной нагрузки достаточна для практики.

Интересно отметить, что с точки зрения теории балок при постоянном коэффициенте жесткости, рассматриваемая балка может

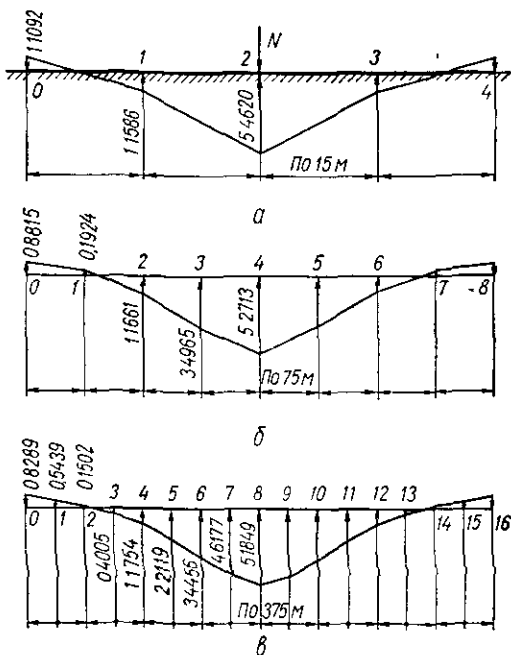


Рис. 27. Эюры реактивных давлений в случае сосредоточенной силы:
а — при $n = 4$; б — при $n = 8$, в — при $n = 16$.

Величины изгибающих моментов в среднем сечении балки

Метод расчета	Количество участков	Равномерно распределенная нагрузка		Сосредоточенная сила в середине длины балки	
		$M_{\text{ср},g}, \text{ тм}$	Разница, проц., по отношению к последующему значению	$M_{\text{ср},N}, \text{ тм}$	Разница, проц., по отношению к последующему значению
Начальных параметров	4	-28,00	10,4	257,54	1,43
	8	-25,44	2,6	253,91	1,28
	16	-24,77	—	250,69	—
Конечных разностей	4	-27,15	7,9	152,14	-32,6
	8	-25,17	1,9	225,32	- 7,5
	16	-24,71	—	243,52	—

быть отнесена к категории длинных, так как приведенная длина балки

$$\lambda = 60 \sqrt[4]{\frac{2750}{4 \cdot 7,54 \cdot 10^6}} = 60 \cdot 0,0975 = 5,85 \approx 6.$$

Сравним результаты наших расчетов и расчета, выполненного Д. Н. Соболевым. В работе [39] рассмотрен случай равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $g = 70 \text{ т/м}$ при тех же параметрах балки и основания. Момент в среднем сечении балки получен равным $-194,8 \text{ тм}$, или принимая $g = 10 \text{ т/м}$,

$$M = -\frac{194,8}{7} = -27,83 \text{ тм}.$$

Следовательно, точность решения Д. Н. Соболева в данном случае примерно равна точности, полученной нами при делении балки на 4 участка.

Рассмотренный пример может быть также решен методом конечных разностей с использованием общей системы уравнений, приведенной в табл. 26. При 4 участках имеем:

$$(2 + \gamma_{10}) p_0 + (1 - 2\gamma_{11}) p_1 + \gamma_{12} p_2 = -\frac{6}{a^2} M_{1в};$$

$$5p_0 + (6 + 2\gamma_{21}) p_1 + (1 - 2\gamma_{22}) p_2 = -\frac{6}{a^2} M_{2в};$$

$$p_0 + 2p_1 + p_2 = -\frac{2}{a} \sum Y_{в}.$$

Вычисляем значения коэффициентов и свободных членов этой системы уравнений:

$$\gamma_{10} = \frac{6EI_0}{K_0 a^3} = \frac{6 \cdot 7,54 \cdot 10^6}{2000 \cdot 15^3} = 0,4468;$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{21} = \frac{6 \cdot 7,54 \cdot 10^6}{2750 \cdot 15^4} = 0,3250;$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{22} = \frac{6 \cdot 7,54 \cdot 10^6}{3000 \cdot 15^4} = 0,2979.$$

При равномерно распределенной нагрузке

$$\frac{6}{a^2} M_{1b} = -\frac{6}{a^2} \frac{ga^2}{2} = -3g = -3 \cdot 10 = -30 \text{ т/м};$$

$$\frac{6}{a^2} M_{2b} = -\frac{6}{a^2} \frac{g(2a)^2}{2} = -12g = -12 \cdot 10 = -120 \text{ т/м};$$

$$\frac{2}{a} \sum Y_v = -\frac{2}{a} g2a = -4g = -4 \cdot 10 = -40 \text{ т/м}.$$

При сосредоточенной силе в середине пролета

$$M_{1b} = M_{2b} = 0;$$

$$\frac{2}{a} \sum Y_v = -\frac{2}{a} \frac{N}{2} = -\frac{N}{a} = -\frac{100}{15} = -6,6667 \text{ т/м}.$$

Дальнейший ход решения аналогичен предыдущему и поэтому здесь не приводится. Результаты расчетов в виде значений наибольших изгибающих моментов представлены в табл. 28, из которой видно, что при нагрузке сосредоточенной силой сходимость решения по методу конечных разностей хуже, чем по методу начальных параметров. При равномерно распределенной нагрузке сходимость обоих методов почти одинакова.

Пример 2. Требуется рассчитать днище камеры докового типа судоходного шлюза. Конструктивная схема камеры, нагрузки и эпюра коэффициентов жесткости основания показаны на рис. 28. Исходные данные этого примера заимствованы из статьи К. Опладена [52].

В направлении, перпендикулярном к чертежу, камера имеет значительную длину, поэтому рассчитывается поперечник шириной 1 м. Днище рассматривается как балка переменного сечения, лежащая на упругом основании переменной жесткости. Для определения реактивных давлений грунта воспользуемся системой уравнений, приведенной в табл. 26.

Всю длину балки разбиваем на 10 участков, длиной каждый $a = 1,9 \text{ м}$ (рис. 29, а). Участки балки, где имеются стены, можно считать бесконечно жесткими. С учетом этого обстоятельства в табл. 29 выписана система расчетных уравнений, в которой также учтена симметрия системы и нагрузки.

Вычисляем изгибные жесткости балки в сечениях 3, 4, 5 (в сечениях 1, 2 $EI = \infty$) при модуле упругости бетона $E = 3 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2$;

$$EI_3 = 3 \cdot 10^6 \frac{1 \cdot 1,613^3}{12} = 1,049 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2;$$

$$EI_4 = EI_5 = 3 \cdot 10^6 \frac{1 \cdot 1,2^3}{12} = 0,432 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2.$$

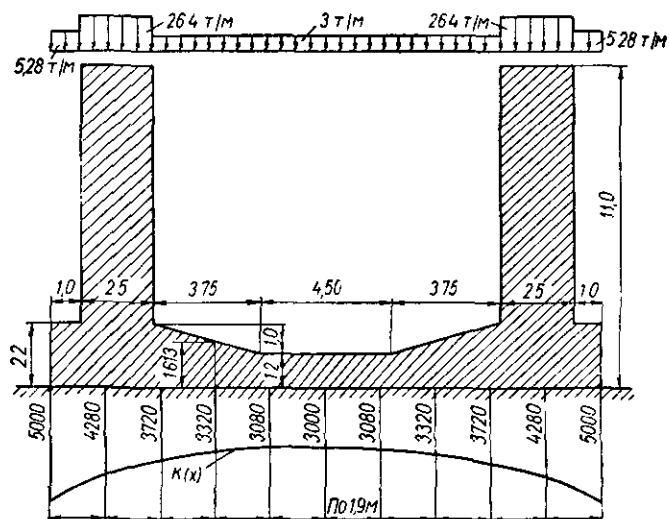


Рис. 28. Конструктивная схема камеры шлюза, нагрузки и эпюры коэффициентов жесткости основания.

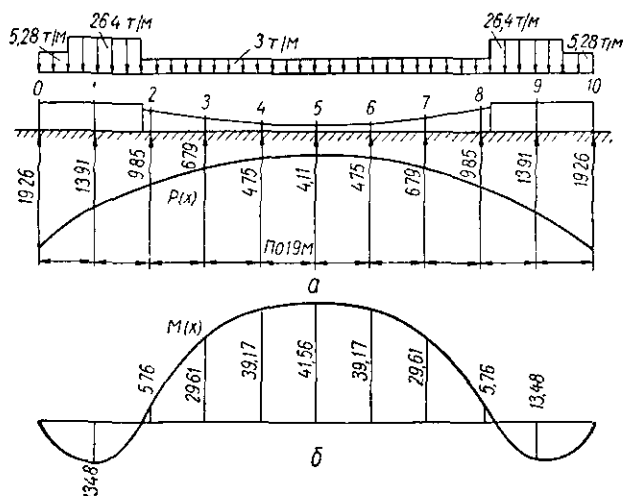


Рис. 29. Расчетная схема дна камеры и эпюры p и M :
 a — эпюра реактивных давлений основания, $б$ — эпюра изгибающих моментов.

Система расчетных уравнений

№ уравнения	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Свободные члены
1	$\frac{1}{K_0}$	$-\frac{2}{K_1}$	$\frac{1}{K_2}$				0
2	0	$\frac{1}{K_1}$	$-\frac{2}{K_2}$	$\frac{1}{K_3}$			0
3	8	12	$6 + \gamma_{32}$	$1 - 2\gamma_{33}$	γ_{34}		$-\frac{6}{a^2} M_{3B}$
4	11	18	12	$6 + \gamma_{43}$	$1 - 2\gamma_{44}$	γ_{45}	$-\frac{6}{a^2} M_{4B}$
5	14	24	18	12	$6 + 2\gamma_{54}$	$1 - 2\gamma_{55}$	$-\frac{6}{a^2} M_{5B}$
6	1	2	2	2	2	1	$-\frac{2}{a} \Sigma Y_B$

Определяем параметры γ :

$$\gamma_{32} = \frac{6 \cdot 1,049 \cdot 10^9}{3720 \cdot 1,9^4} = 129,828;$$

$$\gamma_{33} = \frac{6 \cdot 1,049 \cdot 10^9}{3320 \cdot 1,9^4} = 145,470;$$

$$\gamma_{34} = \frac{6 \cdot 1,049 \cdot 10^6}{3080 \cdot 1,9^4} = 156,806;$$

$$\gamma_{43} = \frac{6 \cdot 0,432 \cdot 10^9}{3320 \cdot 1,9^4} = 59,908;$$

$$\gamma_{44} = \gamma_{54} = \frac{6 \cdot 0,432 \cdot 10^6}{3080 \cdot 1,9^4} = 64,576;$$

$$\gamma_{45} = \gamma_{55} = \frac{6 \cdot 0,432 \cdot 10^6}{3000 \cdot 1,9^4} = 66,298.$$

Подсчитываем значения свободных членов:

$$\begin{aligned} \frac{6}{a^2} M_{3B} = & -\frac{6}{1,9^2} (5,28 \cdot 1 \cdot 5,2 + 26,4 \cdot 2,5 \cdot 3,45 + \\ & + 0,5 \cdot 3 \cdot 2,2^2) = -436,148 \text{ м/ж;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{6}{a^2} M_{4в} &= -\frac{6}{1,9^2} (5,28 \cdot 1 \cdot 7,1 + 26,4 \cdot 2,5 \cdot 5,35 + \\ &\quad + 0,5 \cdot 3 \cdot 4,1^2) = -691,085 \text{ т/м}, \\ \frac{6}{a^2} M_{5в} &= -\frac{6}{1,9^2} (5,28 \cdot 1 \cdot 9 + 26,4 \cdot 2,5 \cdot 7,25 + \\ &\quad + 0,5 \cdot 3 \cdot 6^2) = -964,022 \text{ т/м}; \\ \frac{2}{a} \sum Y_v &= -\frac{2}{1,9} (5,28 \cdot 1 + 26,4 \cdot 2,5 + 3 \cdot 6) = -93,979 \text{ т/м}.\end{aligned}$$

Система расчетных уравнений с численными значениями коэффициентов и свободных членов имеет вид:

$$\begin{aligned}p_0 - 2,336p_1 + 1,334p_2 &= 0; \\ p_1 - 2,301p_2 + 1,289p_3 &= 0; \\ 8p_0 + 12p_1 + 135,828p_2 - 289,941p_3 + 156,806p_4 &= 436,148; \\ 11p_0 + 18p_1 + 12p_2 + 65,908p_3 - 128,152p_4 + 66,298p_5 &= 691,085; \\ 14p_0 + 24p_1 + 18p_2 + 12p_3 + 135,152p_4 - 131,596p_5 &= 964,022; \\ p_0 + 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 2p_4 + p_5 &= 93,979\end{aligned}$$

Здесь для удобства счета первое уравнение преобразовано путем умножения на $K_0 = 5000 \text{ т/м}^2$, второе — на $K_1 = 4280 \text{ т/м}^2$. Решая приведенную систему уравнений, получим:

$$\begin{aligned}p_0 &= 19,2624 \text{ т/м}; & p_1 &= 13,9123 \text{ т/м}; & p_2 &= 9,8488 \text{ т/м}; \\ p_3 &= 6,7881 \text{ т/м}; & p_4 &= 4,7542 \text{ т/м}; & p_5 &= 4,1098 \text{ т/м}\end{aligned}$$

По этим значениям построены эпюры реактивных давлений основания и изгибающих моментов (см. рис. 29), вычисленных по формулам (64).

У К. Опладена значение момента в среднем сечении 5 получено равным 41, 65 тм, что почти не отличается от нашего (41,56). Если на эпюры реактивных давлений и изгибающих моментов нанести соответствующие значения этих величин, вычисленные К. Опладеном, то обе эпюры практически сливаются.

Однако надо отметить, что решение К. Опладена несравненно более громоздкое и трудоемкое по сравнению с изложенным выше.

Пример 3. Рассмотрим пример расчета, приведенный в книге Э. Ф. Корневица и Г. В. Эндера [25, стр. 35]. Бетонная балка длиной $L = 16$, шириной $b = 1$ и высотой $h = 1,2 \text{ м}$ нагружена равными моментами $M_0 = 100 \text{ тм}$, расположенными на расстоянии 4 м от оси симметрии балки (рис. 30). Коэффициент жесткости основания $K = 2000 \text{ т/м}^3$ постоянен по длине балки. Требуется определить величины реакций грунта, изгибающих моментов и перерезывающих сил в сечениях 0, 2' и 5.

Расчетные характеристики балки и основания:

$$K = 2000 \cdot 1 = 2000 \text{ м/м}^2; \quad I = \frac{1 \cdot 1,2^3}{12} = 0,144 \text{ м}^4;$$

$$m = \sqrt[4]{\frac{2000}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \cdot 0,144}} = 0,202 \frac{1}{\text{м}};$$

$$\lambda = 16 \cdot 0,202 = 3,23.$$

Ближайшее значение λ , для которого имеются таблицы расчетных величин, равно 3,0. Поэтому для расчета балки пользуемся табл. 21.

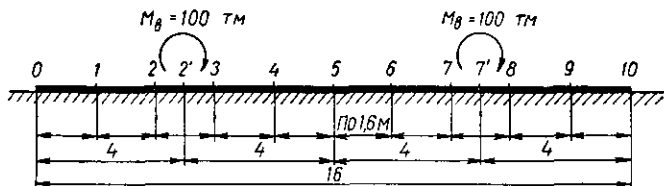


Рис. 30 Схема балки к примеру 3.

Поскольку точки приложения внешних моментов не совпадают с принятым в таблицах делением балки на участки длиной по $0,1 L$, величины p , M и Q определяем по интерполяции между их значениями при расположении M_b в точках 2—3 и 7—8. При этом необходимо учесть, что табличные значения расчетных величин следует брать с обратным знаком, так как направления M_b обратны принятым при составлении таблиц (рис. 21). Значения p , M и Q от действия каждого из моментов суммируем. Расчетные величины в сечениях 0, 2' и 5 от действия момента, приложенного в точке 7', определяются как для зеркально перевернутой балки; например, реактивное давление грунта в точке 0 от действия $M_b = 100 \text{ тм}$ в точке 7' равно реактивному давлению в точке 10 от момента $M_b = 100 \text{ тм}$, приложенного в симметричной точке 2' и направленного против часовой стрелки.

Ограничимся сделанными указаниями и приведем готовые расчетные формулы для определения p , M и Q в сечениях 0, 2' и 5:

$$p_0 = -[0,5(13,7134 + 10,3536) + 0,5(0,7851 + 1,4484)] \frac{100}{16^2} = -5,14 \text{ м/м};$$

$$p_{2'} = -\left[0,5\left(\frac{3,5716 - 0,6718}{2} + \frac{4,5916 + 1,0626}{2}\right) + 0,5\left(\frac{2,5371 + 3,3063}{2} + \frac{2,9130 + 3,4946}{2}\right)\right] \frac{100}{16^2} = -2,03 \text{ м/м};$$

$$p_5 = [0,5(3,8307 + 3,3711) + 0,5(-3,8307 - 3,3711)] \frac{100}{16^2} = 0;$$

$$M_{2'}^{\text{лев}} = - \left[\frac{0,3369 + 0,2078}{2} + 0,5 \left(\frac{0,0389 + 0,0982}{2} + \frac{0,0275 + 0,0748}{2} \right) \right] 100 =$$

$$= -33,21 \text{ мм};$$

$$M_{2'}^{\text{пр}} = 100 - 33,21 = 66,79 \text{ мм};$$

$$M_0 = M_5 = 0;$$

$$Q_0 = 0;$$

$$Q_{2'} = - \left[0,5 \left(\frac{1,7394 + 1,8844}{2} + \frac{1,5032 + 1,7859}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + 0,5 \left(\frac{0,3333 + 0,6255}{2} + \frac{0,4378 + 0,7582}{2} \right) \right] \frac{100}{16} = -14,15 \text{ м};$$

$$Q_5 = -0,5 (2 \cdot 1,3648 + 2 \cdot 1,4764) \frac{100}{16} = -17,77 \text{ м}.$$

Полученные результаты расчета сведены в табл. 30, где для сравнения приведены значения аналогичных величин, вычисленные Э. Ф. Корневицем и Г. В. Эндером при точном значении $\lambda = 3,23$.

Таблица 30

Сравнение результатов расчета

Метод расчета	Расчетные величины					
	p_0	$p_{2'}$	$M_{2'}^{\text{лев}}$	$M_{2'}^{\text{пр}}$	$Q_{2'}$	Q_5
По табл. 21 при $\lambda = 3$	-5,14	-2,03	-33,21	66,79	-14,15	-17,77
Метод, принятый в работе [25], при $\lambda = 3,23$	-5,28	-1,92	-33,41	66,59	-14,66	-17,29
Разница, проц.	2,65	5,7	0,6	0,3	3,5	2,8

Из табл. 30 видно, что результаты расчета при $\lambda = 3$ и $\lambda = 3,23$ практически совпадают.

КРУЧЕНИЕ БАЛОК

Общие сведения

Расчет балки, лежащей на упругом основании, на кручение может найти применение для фундаментов из перекрестных балок, ленточных фундаментов при эксцентричной нагрузке и др. Такой расчет имеет большое значение для уточнения действительной картины работы балки на упругом основании и приближения расчетной схемы к фактической.

Крутящие моменты действуют, как известно, в плоскостях, перпендикулярных к оси балки. Если крутящий момент приложен в пределах длины, незначительной по сравнению со всей длиной балки, то его можно условно считать сосредоточенным в одной плоскости; например, крутящий момент, передаваемый на ленточный фундамент стойкой рамы. При значительных длинах участков передачи крутящих моментов последние считаются сплошными, распределенными по произвольному закону по длине балки. Примером сплошного в общем случае неравномерно распределенного крутящего момента может служить реактивный крутящий момент, передающийся на балку со стороны основания.

Вопросы расчета на кручение балок постоянного сечения, лежащих на упругом винклеровом основании постоянной жесткости, рассмотрены, в частности, В. А. Киселевым [20].

Задача о кручении балки прямоугольного поперечного сечения, описанная В. А. Киселевым, базируется на таких общепринятых допущениях:

прямолинейная ось балки остается прямолинейной и после деформации;

балка в поперечном направлении считается неизгибаемой, но углы поворота поперечных сечений балки будут изменяться от сечения к сечению;

связь между подошвой балки и основанием не нарушается.

Напомним, что третье допущение практически удовлетворяется при совместном действии вертикальной сжимающей нагрузки и кручения, когда отрыв балки от грунта не имеет места.

Из рассмотрения условий равновесия и деформации элементарной полоски балки получено следующее дифференциальное

уравнение крутящих моментов в балке на упругом основании:

$$\frac{d_2 \bar{M}^*}{dx^2} - n^2 \bar{M} = 0, \quad (73)$$

$$\text{где } n = \sqrt{\frac{Kb^3}{24G\alpha h^3}},$$

K — коэффициент жесткости основания;

b — ширина балки;

h — высота балки;

α — коэффициент, определяемый по табл. 31.

Решение уравнения (73), выраженное через гиперболические функции, имеет вид

$$\bar{M} = C_1 \operatorname{sh} \xi + C_2 \operatorname{ch} \xi, \quad (74)$$

где $\xi = nx$ — приведенные абсциссы;

C_1 и C_2 — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Решение (74) пригодно только для балки постоянного по длине сечения, при постоянном коэффициенте жесткости и при расположении сосредоточенных внешних крутящих моментов по концам балки. При соблюдении этих условий вычисление крутящих моментов производится относительно просто. В случае, когда крутящие моменты действуют в пролете, расчет усложняется, так как необходимо рассматривать каждый участок балки отдельно.

Таким образом, указанное решение имеет ограниченную сферу применения. Ниже излагается общий численный метод расчета на кручение балок на упругом основании, разработанный нами применительно к упругому основанию переменной сжимаемости и балкам переменной жесткости.

В практических расчетах приходится вычислять жесткость поперечных сечений балки при кручении, которая, как и при изгибе, выражается в виде произведения $G\bar{I}$, где G — модуль сдвига материала балки, \bar{I} — момент инерции сечения при кручении. Для прямоугольного сечения

$$\bar{I} = \alpha b h^3, \quad (75)$$

где b — ширина балки;

h — высота балки.

Коэффициент α определяется по табл. 31 в зависимости от отношения $\frac{b}{h}$, полагая, что $b > h$. Если $b < h$, то α принимается по той же таблице, но при перемене обозначений: b — на h и h — на b ; в этом случае формула (75) приобретает вид

$$\bar{I} = \alpha h b^3.$$

* Здесь и далее черточка над M обозначает, что имеется в виду крутящий момент (в отличие от изгибающего).

Для балок с полигональным поперечным сечением, которое может быть разбито на отдельные прямоугольники, момент инерции при кручении всего сечения может быть приближенно представлен в виде суммы моментов инерций прямоугольников, составляющих данное сечение:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots \bar{I}_n, \quad (76)$$

где 1, 2, ..., n — номера прямоугольников, на которые разбито сечение.

Таблица 31

Значения коэффициента α

$\frac{b}{h}$	α	$\frac{b}{h}$	α	$\frac{b}{h}$	α	$\frac{b}{h}$	α
1,0	0,141	3,5	0,274	1,8	0,217	6,0	0,298
1,2	0,166	4,0	0,281	2,0	0,229	7,0	0,304
1,4	0,187	4,5	0,287	2,3	0,242	8,0	0,307
1,5	0,196	5,0	0,291	2,5	0,249	10,0	0,312
1,6	0,204	5,5	0,295	3,0	0,263	∞	0,333

Метод расчета

Задача расчета балки на кручение решалась при исходных предположках, указанных в предыдущем параграфе.

Рассмотрим свободно лежащую на упругом основании переменной сжимаемости балку, имеющую переменный по длине момент инерции сечения (рис. 31). Балка нагружена произвольно расположенными сосредоточенными M_b и распределенными \bar{m}_b крутящими моментами.

При деформации балки под действием внешних крутящих моментов M_b и \bar{m}_b в упругом основании возникают реактивные крутящие моменты \bar{m}_p (рис. 31, а), обеспечивающие равновесие балки. Реактивные моменты создаются реактивными давлениями основания, распределенными в поперечном направлении по симметричному линейному закону (рис. 31, в). При таком распределении давлений следует пользоваться значениями коэффициентов жесткости при повороте фундамента K_ϕ .

Величина краевого реактивного давления p_x под каким-либо сечением, находящимся на расстоянии x от левого конца балки, определяется формулой

$$p_x = \frac{6\bar{m}_{xp}}{b^2}, \quad (77)$$

где b — ширина подошвы балки.

Для определения реактивных моментов можно воспользоваться, как и при изгибе балки, условиями равновесия и совместности деформаций балки и основания.

При кручении условия равновесия выражаются одним уравнением

$$\sum M_x = 0, \quad (78)$$

означающим, что алгебраическая сумма всех внешних и реактивных моментов относительно оси x равна нулю.

Условия совместности деформаций можно записать в виде

$$\varphi_{xb} = \varphi_{xo}, \quad (79)$$

где φ_{xb} — угол закручивания какого-либо сечения, удаленного на расстояние x от левого конца балки;

φ_{xo} — угол поворота поверхности основания под тем же сечением.

Уравнений вида (79) можно составить столько, сколько требуется для получения желаемой степени точности результатов. При выборе числа и мест расположения сечений, где соблюдается условие (79), необходимо учитывать жесткость балки при кручении, характер нагрузки и вид эпюры коэффициентов жесткости основания.

Выведем расчетные уравнения для общего случая балки переменной жесткости. Для наглядности разобьем всю длину балки, изображенной на рис. 31, на 5 участков произвольной длины a_1, a_2, \dots, a_5 . Если характер изменения жесткости балки имеет ступенчатый вид, то точки деления следует располагать таким образом, чтобы в пределах каждого участка жесткость была постоянной. При криволинейном законе изменения жесткости балки по длине необходимо его заменить ступенчато переменным, как показано на рис. 32. Криволинейную эпюру реактивных давлений заменим полигональной с переломами в точках деления 1, 2, 3 и 4.

В точках, соответствующих сечениям 0, 1, 2, ..., 5, погонные интенсивности реактивных крутящих моментов обозначим $\bar{m}_{0p}, \bar{m}_{1p}, \dots, \bar{m}_{5p}$.

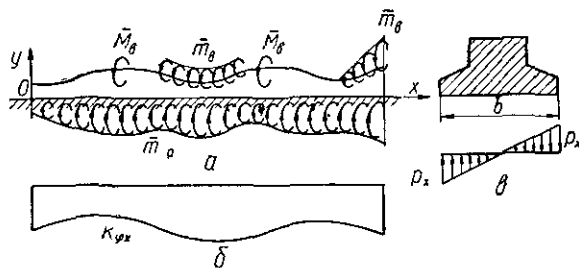


Рис. 31. Схема балки, работающей на кручение:

a — нагрузки и эпюры реактивных моментов; b — эпюра коэффициентов жесткости; ρ_x — распределение реактивных давлений в поперечном направлении под произвольным сечением балки.

Примем следующие правила знаков для крутящих моментов и углов закручивания:

крутящий момент будет считаться положительным, если, смотря со стороны положительного направления оси x , он будет направ-

лен в сторону вращения часовой стрелки;

знаки углов закручивания соответствуют знакам крутящих моментов, вызывающих их появление.

При составлении расчетных уравнений направления действия внешних и реактивных крутящих моментов считаются положительными.

Уравнение равновесия (78) для рассматриваемой балки (см. рис. 32) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{m}_0 a_1 + \bar{m}_1 (a_1 + a_2) + \bar{m}_2 (a_2 + a_3) + \bar{m}_3 (a_3 + a_4) + \\ + \bar{m}_4 (a_4 + a_5) + \bar{m}_5 a_5 + 2 \Sigma \bar{M}_{xв} = 0, \end{aligned} \quad (80)$$

где $\Sigma \bar{M}_{xв}$ — алгебраическая сумма всех внешних крутящих моментов, приложенных к балке, относительно оси x .

В уравнениях совместности деформаций (79) углы кручения необходимо выразить в функции искомых реактивных и известных внешних моментов. Для этой цели воспользуемся формулами для определения абсолютных углов закручивания (табл. 32) для основных видов нагрузки.

Указанные углы закручивания представляют собой углы поворота правого крайнего сечения и относительно левого крайнего сечения $л$; расстояние между сечениями $л$ и $п$ равно a ; жесткость балки GI по длине постоянна. Сосредоточенные моменты, приложенные к сечению $п$, являются уравновешивающими и численно равны сумме моментов, приложенных слева от этого сечения. Например, в схеме 1 $\bar{M}_п = \bar{M}_л$, в схеме 2 $\bar{M}_п = \bar{m}a$, в схеме 3 $\bar{M}_п = -\frac{ma^2}{2}$ и т. д.

Применяя метод начальных параметров, можем записать выражения для углов закручивания сечений 1, 2, ..., 5 балки. За начальное сечение принимаем левый конец балки, т. е. сечение 0. Угол закручивания этого сечения обозначим φ_{05} .

Разрежем балку по сечению 1 (см. рис. 32) и, мысленно отбросив правую часть, рассмотрим равновесие и деформации оставшейся левой части. Действие отброшенной правой части на оставшуюся заменяется внутренним крутящим моментом, который численно равняется алгебраической сумме моментов относительно оси балки всех внешних и реактивных крутящих моментов, приложенных к балке слева от сечения 1. Угол закручивания сечения 1 с учетом начального угла закручивания φ_{05} сечения 0 будет равен

$$\varphi_{15} = \varphi_{05} + (2\bar{m}_0 + \bar{m}_1) \frac{a_1^2}{6GI_1} + \varphi_{1в}.$$

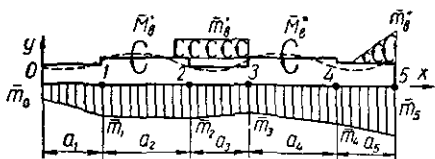
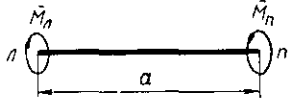
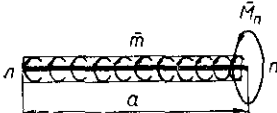
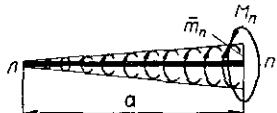
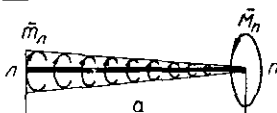
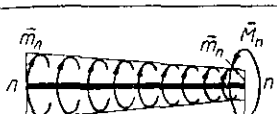


Рис. 32. Расчетная схема балки.

Формулы углов закручивания

№ схемы	Вид нагрузки	Угол поворота сечения 1 по отношению к сечению 0
1		$\varphi_{10} = \frac{\bar{M}_n a}{G I}$
2		$\varphi_{10} = \frac{\bar{m} a^2}{2G I}$
3		$\varphi_{10} = \frac{\bar{m}_n a^3}{6G I}$
4		$\varphi_{10} = \frac{\bar{m}_n a^3}{3G I}$
5		$\varphi_{10} = (2\bar{m}_0 + \bar{m}_n) \frac{a^3}{6G I}$

Здесь член $(2\bar{m}_0 + \bar{m}_1) \frac{a_1^3}{6GI_1}$ выражает собой угол поворота сечения 1 по отношению к сечению 0 от действия реактивных крутящих моментов, распределенных на участке 0—1 по закону трапеции; а φ_{10} — то же, но от действия только внешних (активных) крутящих моментов.

Введем обозначение

$$t_i = \frac{a_i}{6GI_i},$$

где i — номер участка балки ($i = 1, 2, \dots, 5$).

Тогда выражение для φ_{10} запишется следующим образом:

$$\varphi_{10} = \varphi_{05} + 2\bar{m}_0 t_1 a_1 + \bar{m}_1 t_1 a_1 + \varphi_{1n}. \quad (81)$$

Для получения угла закручивания сечения 2 используем принцип переноса начала и в качестве начального сечения считаем уже сечение 1. Действие участка балки, расположенного слева от сечения 1, заменяется сосредоточенным крутящим моментом, равным сумме моментов, приложенных к балке слева от этого сечения. Начальный угол поворота сечения 1 равен φ_{10} . Подобно предыдущему будем иметь

$$\varphi_{20} = \varphi_{10} + 2\bar{m}_1 t_2 a_2 + \bar{m}_2 t_2 a_2 + \frac{\bar{m}_0 + \bar{m}_1}{2} 6t_2 a_1 + \varphi'_{2B}.$$

Подставляя сюда значение φ_{10} по формуле (81), получим

$$\begin{aligned} \varphi_{20} = \varphi_{00} + \bar{m}_0 a_1 (2t_1 + 3t_2) + \bar{m}_1 [a_1 (t_1 + 3t_2) + 2a_2 t_2] + \\ + \bar{m}_2 a_2 t_2 + \varphi_{2B}, \end{aligned} \quad (82)$$

где $\varphi_{2B} = \varphi_{1B} + \varphi'_{2B}$.

Аналогично находим

$$\begin{aligned} \varphi_{30} = \varphi_{00} + \bar{m}_0 a_1 [2t_1 + 3(t_2 + t_3)] + \bar{m}_1 [a_1 (t_1 + 3(t_2 + t_3)) + \\ + a_2 (2t_2 + 3t_3)] + \bar{m}_2 [a_2 (t_2 + 3t_3) + 2a_3 t_3] + \bar{m}_3 a_3 t_3 + \varphi_{3B}; \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{40} = \varphi_{00} + \bar{m}_0 a_1 [2t_1 + 3(t_2 + t_3 + t_4)] + \bar{m}_1 [a_1 (t_1 + \\ + 3(t_2 + t_3 + t_4) + a_2 (2t_2 + 3(t_3 + t_4))) + \bar{m}_2 [a_2 (t_2 + \\ + 3(t_3 + t_4) + a_3 (2t_3 + 3t_4))] + \\ + \bar{m}_3 [a_3 (t_3 + 3t_4) + 2a_4 t_4] + \bar{m}_4 a_4 t_4 + \varphi_{4B} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (84)$$

Таким образом, углы закручивания сечений 1, 2, ..., n выражены в функции искомых реактивных крутящих моментов и неизвестного угла закручивания начального сечения балки. Теперь необходимо составить подобные выражения для углов поворота поверхности основания под рассматриваемыми сечениями балки.

Полагая, что в поперечном направлении балка является абсолютно жесткой, можно воспользоваться известной формулой угла поворота жесткого фундамента от действия момента

$$\varphi = \frac{\bar{M}}{K_{i\varphi} I}.$$

В нашем случае угол поворота i -го участка поверхности основания определяется по формуле

$$\varphi_{i0} = \frac{\bar{m}_i}{K_{i\varphi} I_i}, \quad (85)$$

где $K_{i\varphi}$ — коэффициент жесткости при повороте фундамента в точке i основания;

I_i — момент инерции площади подошвы балки шириной b

и единичной длины относительно оси вращения, рав-
ный $\frac{1 \cdot b_i^3}{12}$.

Обозначая через $u_i = \frac{12}{K_{i\varphi} b_i^3}$, будем иметь

$$\varphi_{00} = \overline{m}_0 u_0; \quad \varphi_{10} = \overline{m}_1 u_1; \quad \varphi_{20} = \overline{m}_2 u_2 \text{ и т. д.} \quad (86)$$

В соответствии с условием совместности деформаций (79) можем записать ряд таких равенств

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{06} &= \varphi_{00}; \\ \varphi_{16} &= \varphi_{10}; \\ \dots &\dots \dots \\ \varphi_{n6} &= \varphi_{n0}; \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

где n — число участков, на которые разбита балка для расчета (в рассматриваемом случае $n = 5$).

Подставляя в уравнения (87) значения φ_{i6} по формулам (81—84) и φ_{i0} по формулам (86), после элементарных преобразований получим следующую систему расчетных уравнений совместности деформаций балки и основания:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad & \overline{m}_0 (2a_1 t_1 + u_0) + \overline{m}_1 (a_1 t_1 - u_1) + \varphi_{1B} = 0; \\ 2) \quad & \overline{m}_0 [a_1 (2t_1 + 3t_2) + u_0] + \overline{m}_1 [a_1 (t_1 + 3t_2) + \\ & + 2a_2 t_2] + \overline{m}_2 (a_2 t_2 - u_2) + \varphi_{2B} = 0; \\ 3) \quad & \overline{m}_0 [a_1 (2t_1 + 3(t_2 + t_3)) + u_0] + \overline{m}_1 [a_1 (t_1 + \\ & + 3(t_2 + t_3)) + a_2 (2t_2 + 3t_3)] + \overline{m}_2 [a_2 (t_2 + 3t_3) + 2a_3 t_3] + \\ & + \overline{m}_3 (a_3 t_3 - u_3) + \varphi_{3B} = 0; \\ 4) \quad & \overline{m}_0 [a_1 (2t_1 + 3(t_2 + t_3 + t_4)) + u_0] + \\ & + \overline{m}_1 [a_1 (t_1 + 3(t_2 + t_3 + t_4)) + a_2 (2t_2 + \\ & + 3(t_3 + t_4))] + \overline{m}_2 [a_2 (t_2 + 3(t_3 + t_4)) + \\ & + a_3 (2t_3 + 3t_4)] + \overline{m}_3 [a_3 (t_3 + 3t_4) + 2a_4 t_4] + \\ & + \overline{m}_4 (a_4 t_4 - u_4) + \varphi_{4B} = 0 \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Система уравнений (88) совместно с уравнением равновесия (80) полностью решают поставленную задачу.

Оценка точности получаемых решений может быть выполнена при помощи такого же приема, который был предложен нами при исследовании изгиба балок на неравномерно сжимаемом основании [22]. В данном случае вычисляем дважды значения \overline{m}_i : с раз-
мерами участка a_i и $\frac{a_i}{2}$.

Если расхождение значений \bar{m}_i в точках деления x_i , соответствующих длинам участков $\frac{a_i}{2}$, не превышает допустимой погрешности, то размеры a достаточны. В противном случае следует в два раза уменьшить длины $\frac{a_i}{2}$, т. е. принять $\frac{a_i}{4}$ и произвести новый расчет.

Формулы коэффициентов и свободных членов расчетных уравнений

Рассматривая систему уравнений (88), можно заметить следующие ее особенности.

Количество неизвестных в первом уравнении равно двум. В каждом уравнении оно увеличивается на одно неизвестное, а общее число последних в любом уравнении на единицу больше номера уравнения. Коэффициенты при неизвестных реактивных моментах изменяются с увеличением номера уравнения по определенному закону. Изучая закономерности образования коэффициентов, нетрудно получить общие формулы для их вычисления при любом количестве уравнений.

Матрица коэффициентов при неизвестных \bar{m}_i и свободных членов приведена в табл. 33.

Таблица 33

Матрица коэффициентов и свободных членов

№ урав- нения	m_0	m_1	m_2	m_3	...	m_i	...	m_{n-1}	m_n	Свободные члены (в правой части)
1	A_{10}	A_{11}								$-\varphi_{1p}$
2	A_{20}	A_{21}	A_{22}							$-\varphi_{2p}$
3	A_{30}	A_{31}	A_{32}	A_{33}						$-\varphi_{3p}$
...
r	A_{r0}	A_{r1}	A_{r2}	A_{r3}	...	A_{ri}	...			$-\varphi_{rp}$
...
n	A_{n0}	A_{n1}	A_{n2}	A_{n3}	...	A_{ni}	...	$A_{n,n-1}$	A_{nn}	$-\varphi_{np}$
$n+1$	a_1	a_1+a_2	a_2+a_3	a_3+a_4	...	a_i+a_{i+1}	...	$a_{n-1}+a_n$	a_n	$-\sum \bar{M}_B$

Формулы коэффициентов при первом члене уравнений совместности:

$$A_{10} = 2a_1 t_1 + u_0;$$

$$A_{r0} = a_r \left(2t_1 + 3 \sum_{j=2}^r t_j \right) + u_0 \quad (r = 2, 3, \dots, n); \quad (89)$$

при последнем члене уравнения:

$$A_{rr} = a_r t_r - u_r \quad (r = 1, 2, \dots, n); \quad (90)$$

при предпоследнем члене уравнения:

$$A_{r, r-1} \approx a_{r-1} (t_{r-1} + 3t_r) + 2a_r t_r \quad (r = 2, 3, \dots, n); \quad (91)$$

при промежуточном члене уравнения:

$$A_{ri} = a_i \left(t_i + 3 \sum_{j=i+1}^r t_j \right) + a_{i+1} \left(2t_{i+1} + 3 \sum_{j=i+2}^r t_j \right) \quad (92)$$

$$(r \approx 3, 4, \dots, n), \quad (i = 1, 2, \dots, r-2).$$

Формулы свободных членов при действии сосредоточенных крутящих моментов, приложенных в сечениях 0, 1, 2, ..., n (рис. 33, а):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1B} &= 6\bar{M}_{0B} t_1; \\ \varphi_{2B} &= 6[\bar{M}_{0B} (t_1 + t_2) + \bar{M}_{1B} t_2]; \\ \varphi_{3B} &= 6[\bar{M}_{0B} (t_1 + t_2 + t_3) + \bar{M}_{1B} (t_2 + t_3) + \bar{M}_{2B} t_3]; \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_{rB} &= 6 \sum_{i=0}^{r-1} \left(\bar{M}_{iB} \sum_{j=i+1}^r t_j \right). \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

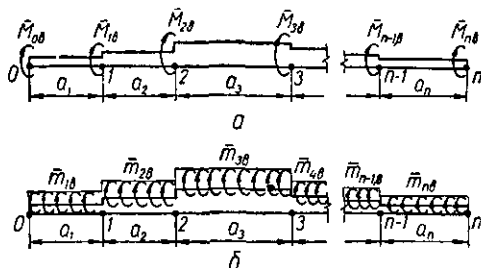
Формулы свободных членов при действии равномерно распределенных по участкам балки крутящих моментов (рис. 33, б):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1B} &= 3\bar{m}_{1B} t_1 a_1; \\ \varphi_{2B} &= 3[\bar{m}_{1B} a_1 (t_1 + 2t_2) + \bar{m}_{2B} a_2 t_2]; \\ \varphi_{3B} &= 3[\bar{m}_{1B} a_1 (t_1 + 2t_2 + 2t_3) + \bar{m}_{2B} a_2 (t_2 + 2t_3) + \\ &\quad + \bar{m}_{3B} a_3 t_3]; \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_{rB} &= 3 \left\{ \sum_{i=1}^r \left[\bar{m}_{iB} a_i \left(t_i + 2 \sum_{j=i+1}^{r-1} t_j \right) \right] + \bar{m}_r a_r t_r \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Любой вид распределения крутящих моментов можно свести к указанным на рис. 33 двум типам нагрузок, что дает возможность непосредственного использования формул (93) или (94), или их суммы.

Рис. 33. Схема расположения внешних нагрузок:

a — сосредоточенные крутящие моменты, b — равномерно распределенные по участкам крутящие моменты.



В случае балки постоянной жесткости и участков равной длины формулы коэффициентов и свободных членов расчетных уравнений значительно упрощаются.

В табл. 34 приведена система уравнений для балки, разбитой на 5 равных участков длиной a каждый. Здесь

$$\gamma_1 = \frac{72GI}{K_{1\varphi} b^3 a^2};$$

$$t = \frac{a^2}{6GI}.$$

Из табл. 34 видно, что коэффициенты при неизвестных реактивных моментах изменяются с увеличением номера уравнения по чрезвычайно простым линейным законам и могут быть легко вычислены для любого количества уравнений.

Формулы для вычисления свободных членов при нагрузке, состоящей из сосредоточенных крутящих моментов, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi_{1B}}{t} &= \frac{6}{a} \overline{M}_{0B}; \\ \frac{\varphi_{2B}}{t} &= \frac{6}{a} (2\overline{M}_{0B} + \overline{M}_{1B}); \\ \frac{\varphi_{3B}}{t} &= \frac{6}{a} (3\overline{M}_{0B} + 2\overline{M}_{1B} + \overline{M}_{2B}); \\ \frac{\varphi_{4B}}{t} &= \frac{6}{a} (4\overline{M}_{0B} + 3\overline{M}_{1B} + 2\overline{M}_{2B} + \overline{M}_{3B}); \\ \frac{\varphi_{5B}}{t} &= \frac{6}{a} (5\overline{M}_{0B} + 4\overline{M}_{1B} + 3\overline{M}_{2B} + 2\overline{M}_{3B} + \overline{M}_{4B}) \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Система уравнений для балки постоянной жесткости с равными участками

№ урав- нения	\bar{m}_0	\bar{m}_1	\bar{m}_2	\bar{m}_3	\bar{m}_4	\bar{m}_5	Свободные члены (в правой части)
1	$2 + \gamma_0$	$1 - \gamma_1$					$-\frac{\varphi_{1B}}{t}$
2	$5 + \gamma_0$	6	$1 - \gamma_2$				$-\frac{\varphi_{2B}}{t}$
3	$8 + \gamma_0$	12	6	$1 - \gamma_3$			$-\frac{\varphi_{3B}}{t}$
4	$11 + \gamma_0$	18	12	6	$1 - \gamma_4$		$-\frac{\varphi_{4B}}{t}$
5	$14 + \gamma_0$	24	18	12	6	$1 - \gamma_5$	$-\frac{\varphi_{5B}}{t}$
6	1	2	2	2	2	1	$-\frac{2}{a} \approx \bar{M}_B$

При нагрузке в виде равномерно распределенных по участкам крутящих моментов имеем

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\varphi_{1B}}{t} &= 3\bar{m}_{1B}; \\
 \frac{\varphi_{2B}}{t} &= 3(3\bar{m}_{1B} + \bar{m}_{2B}); \\
 \frac{\varphi_{3B}}{t} &= 3(5\bar{m}_{1B} + 3\bar{m}_{2B} + \bar{m}_{3B}); \\
 \frac{\varphi_{4B}}{t} &= 3(7\bar{m}_{1B} + 5\bar{m}_{2B} + 3\bar{m}_{3B} + \bar{m}_{4B}); \\
 \frac{\varphi_{5B}}{t} &= 3(9\bar{m}_{1B} + 7\bar{m}_{2B} + 5\bar{m}_{3B} + 3\bar{m}_{4B} + \bar{m}_{5B}) \text{ и т. д.}
 \end{aligned} \right\} (96)$$

Еще более упрощается решение, если балку можно считать абсолютно жесткой в продольном направлении. В этом случае углы поворота всех сечений балки равны между собой, т. е. $\varphi = \text{const.}$

Поэтому в соответствии с формулами (86) можно записать

$$\varphi = \bar{m}_0 u_0 = \bar{m}_1 u_1 = \bar{m}_2 u_2 = \dots = \bar{m}_n u_n,$$

откуда

$$\bar{m}_0 = \frac{\varphi}{u_0}; \quad \bar{m}_1 = \frac{\varphi}{u_1}; \quad \bar{m}_2 = \frac{\varphi}{u_2}; \quad \dots; \quad \bar{m}_n = \frac{\varphi}{u_n} \quad (97)$$

Подставляя эти значения реактивных моментов в уравнение равновесия (уравнение № $n + 1$ табл. 33), получим

$$\varphi \left(\frac{a_1}{u_0} + \frac{a_1 + a_2}{u_1} + \frac{a_2 + a_3}{u_2} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_n}{u_{n-1}} + \frac{a_n}{u_n} \right) + 2 \sum \bar{M}_B = 0,$$

отсюда

$$\varphi = - \frac{2 \sum \bar{M}_B}{\frac{a_1}{u_0} + \frac{a_1 + a_2}{u_1} + \frac{a_2 + a_3}{u_2} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_n}{u_{n-1}} + \frac{a_n}{u_n}}. \quad (98)$$

При равных длинах участков ($a_1 = a_2 = \dots = a$) и постоянной ширине подошвы балки $b = \text{const}$

$$\varphi = - \frac{24 \sum \bar{M}_B}{ab^3 (K_{0\varphi} + 2K_{1\varphi} + 2K_{2\varphi} + \dots + 2K_{n-1, \varphi} + K_{n\varphi})}; \quad (99)$$

при постоянном по длине балки коэффициенте жесткости основания $K_{0\varphi} = K_{1\varphi} = \dots = K_{\varphi}$

$$\varphi = - \frac{12 \sum \bar{M}_B}{Lb^3 K_{\varphi}}, \quad (100)$$

где L — полная длина балки.

Имея значение φ , по формулам (97) можно вычислить величины реактивных крутящих моментов под любым сечением балки.

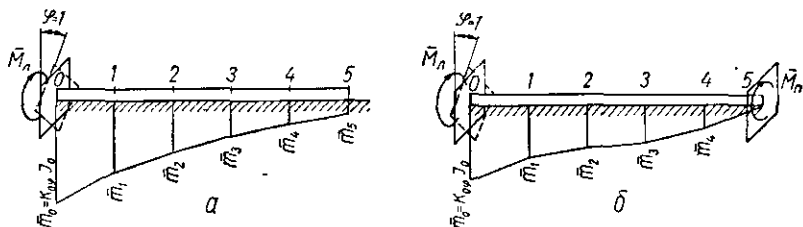


Рис. 34. Кручение балки с зашечленными концами:

a — единичный поворот зашечления балки, имеющей один зашечленный конец;
 b — единичный поворот зашечления балки, имеющей оба зашечленных конца.

При расчете фундаментов из перекрестных балок методом перемещений необходимо иметь решения для балок с одним и двумя зашечленными концами при единичном повороте зашечления. Составленные для этих случаев системы уравнений приведены в табл. 35 и 36.

Таблица 35

Система уравнений для балки постоянной жесткости с одним заделанным концом (рис. 34, а)

№ уравнения	\bar{M}_L	\bar{m}_1	\bar{m}_2	\bar{m}_3	\bar{m}_4	\bar{m}_5	Свободные члены при повороте левого конца на угол $\varphi = 1$
1	$\frac{6}{a}$	$1 - \gamma_1$	—	—	—	—	$-\left(\frac{1}{t} + \frac{2}{u_0}\right)$
2	$\frac{12}{a}$	6	$1 - \gamma_2$	—	—	—	$-\left(\frac{1}{t} + \frac{5}{u_0}\right)$
3	$\frac{18}{a}$	12	6	$1 - \gamma_3$	—	—	$-\left(\frac{1}{t} + \frac{8}{u_0}\right)$
4	$\frac{24}{a}$	18	12	6	$1 - \gamma_4$	—	$-\left(\frac{1}{t} + \frac{11}{u_0}\right)$
5	$\frac{30}{a}$	24	18	12	6	$1 - \gamma_5$	$-\left(\frac{1}{t} + \frac{14}{u_0}\right)$
6	$\frac{2}{a}$	2	2	2	2	1	$-\frac{1}{u_0}$

Таблица 36

Система уравнений для балки постоянной жесткости с обоими заделанными концами (рис. 34, б)

№ уравнения	\bar{M}_L	\bar{m}_1	\bar{m}_2	\bar{m}_3	\bar{m}_4	\bar{M}_Π	Свободные члены при повороте левого конца на угол $\varphi = 1$
1	$\frac{6}{a}$	$1 - \gamma_1$	—	—	—	—	$-\left(\frac{1}{t} + \frac{2}{u_0}\right)$
2	$\frac{12}{a}$	6	$1 - \gamma_2$	—	—	—	$-\left(\frac{1}{t} + \frac{5}{u_0}\right)$
3	$\frac{18}{a}$	12	6	$1 - \gamma_3$	—	—	$-\left(\frac{1}{t} + \frac{8}{u_0}\right)$
4	$\frac{24}{a}$	18	12	6	$1 - \gamma_4$	—	$-\left(\frac{1}{t} + \frac{11}{u_0}\right)$
5	$\frac{30}{a}$	24	18	12	6	—	$-\left(\frac{1}{t} + \frac{14}{u_0}\right)$
6	$\frac{2}{a}$	2	2	2	2	$\frac{2}{a}$	$-\frac{1}{u_0}$

Пример расчета

На балку длиной $L = 5$ м, лежащую на грунтовом основании действует крутящий момент, приложенный к левому концу балки (рис. 35, а). Балка железобетонная, поперечное сечение прямо-

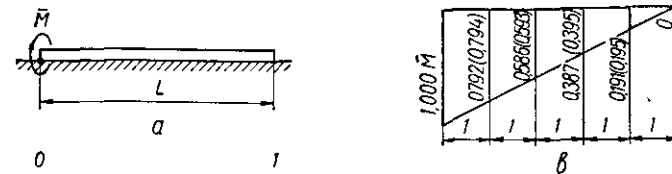


Рис. 35. К примеру расчета:
а — схема балки и нагрузок; б —
эпюра реактивных крутящих мо-
ментов; в — эпюра крутящих мо-
ментов в сечениях балки

угольное с размерами: ширина $b = 1,2$ м, высота $h = 0,8$ м. Балка имеет постоянную по длине жесткость. Коэффициент постели также постоянный и численно равен $K_{\varphi} = 7200$ т/м². Модуль сдвига бетона $G = 900\,000$ т/м².

Требуется построить эпюру реактивных крутящих моментов, действующих на балку со стороны основания, и эпюру крутящих моментов в сечениях балки.

Момент инерции сечения балки при кручении согласно формуле (75) равен

$$\bar{I} = \alpha b h^3 = 0,196 \cdot 1,2 \cdot 0,8^3 = 0,1204 \text{ м}^4,$$

где коэффициент $\alpha = 0,196$ взят из табл. 31 по отношению

$$\frac{b}{h} = \frac{1,2}{0,8} = 1,5.$$

В качестве первого, самого простого приближения примем, что балка состоит из одного участка ($a = L$) и эпюра реактивных крутящих моментов изменяется по линейному закону от значения m_0 на левом конце до \bar{m}_1 на правом конце балки (рис. 35, б). Для решения задачи в этом случае достаточно составить два уравнения: совместности и равновесия.

Пользуясь табл. 34, выписываем необходимые уравнения

$$(2 + \gamma_0) \bar{m}_0 + (1 - \gamma_1) m_1 + \frac{\varphi_{1в}}{t} = 0;$$

$$\bar{m}_0 + \bar{m}_1 + \frac{2}{a} \sum \bar{M}_в = 0.$$

Вычисляем коэффициенты и свободные члены системы учитывая, что здесь

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \frac{72\bar{G}\bar{I}}{K_\varphi b^3 a^2} = \frac{72 \cdot 900000 \cdot 0,1204}{7200 \cdot 1,2^3 \cdot 5^2} = 25,1.$$

Коэффициенты при неизвестных первого уравнения

$$2 + \gamma = 2 + 25,1 = 27,1;$$

$$1 - \gamma = 1 - 25,1 = -24,1.$$

По первой из формул (95) находим

$$\frac{\varphi_{1в}}{t} = \frac{6}{a} \bar{M}_{0в} = \frac{6}{5} \bar{M} = 1,2\bar{M}$$

Свободный член уравнения равновесия

$$\frac{2}{a} \sum \bar{M}_в = \frac{2}{5} \bar{M} = 0,4\bar{M}.$$

Таким образом, имеем

$$27,1\bar{m}_0 - 24,1\bar{m}_1 = -1,2\bar{M};$$

$$\bar{m}_0 + \bar{m}_1 = -0,4\bar{M}.$$

Решая систему уравнений относительно \bar{m}_0 и \bar{m}_1 , находим $\bar{m}_0 = -0,211 \bar{M}$; $\bar{m}_1 = -0,189 \bar{M}$.

По эпюре \bar{m} , представляющей собой в данном случае трапецию, строится эпюра крутящих моментов \bar{M}_x в сечениях балки. При построении эпюры \bar{M}_x мысленно перемещаемся от правого конца балки к левому, последовательно определяя для сечений, расположенных через 1 м, значения \bar{M}_x , численно равные правоотсеченным площадям эпюры \bar{m} .

Эпюра \bar{M}_x изображена на рис. 35, в, где в скобках приведены значения моментов, подсчитанные по точному методу [20]. Наибольшее расхождение между точным и приближенным решениями составляет всего 2%.

СИСТЕМЫ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК

Общие сведения

Системы перекрестных балок, лежащих на упругом основании, применяются в качестве фундаментов для здания и сооружений промышленного, гражданского и инженерного характера.

Железобетонные фундаменты из перекрестных балок особенно целесообразны при строительстве на слабых и неоднородных грунтах. Однако и в случае хороших грунтов, когда на фундаменты передаются большие сосредоточенные нагрузки от колонн, расположенных сравнительно близко одна от другой, выгоднее бывает для обеспечения равномерной осадки сооружения устраивать фундаменты из перекрестных балок вместо отдельных фундаментов под колонны.

В практике наиболее часто встречаются системы, балки которых пересекаются под прямым углом, а нагрузка, как правило, действует перпендикулярно плоскости системы перекрестных балок. Такого типа системы и будем рассматривать ниже (рис. 36).

С точки зрения строительной механики система перекрестных балок относится к классу плоских рам, работающих на пространственную нагрузку. В таких системах внутренние усилия в сечениях балок (стержней) имеют не три, а шесть составляющих: изгибающие моменты в двух главных плоскостях инерции, перерезывающие силы в этих плоскостях, крутящий момент и продольное усилие. Однако при действии нагрузки, перпендикулярной к плоскости системы перекрестных балок, изгибающие моменты, перерезывающие и продольные силы в этой плоскости можно принять равными нулю [36]. Остаются неизвестными только изгибающий момент M_x , крутящий момент M , и перерезывающая сила Q_z (рис. 37).

Опирающие балки на сплошное упругое основание не вносят дополнительных осложнений, поскольку в качестве элемента основной системы можно принимать отдельную балку на упругом основании, для которой имеются решения. На практике, однако, расчет таких систем наталкивается на определенные трудности, обусловленные значительным количеством неизвестных и пространственным характером работы системы. При этом необходимо подчеркнуть, что все практические расчеты фундаментов из перекрестных балок производятся до настоящего времени исключительно

по винклеровой модели упругого основания при постоянном коэффициенте жесткости основания.

Наиболее обстоятельно вопросы расчета систем перекрестных балок, лежащих на упругом основании, рассмотрены в работах

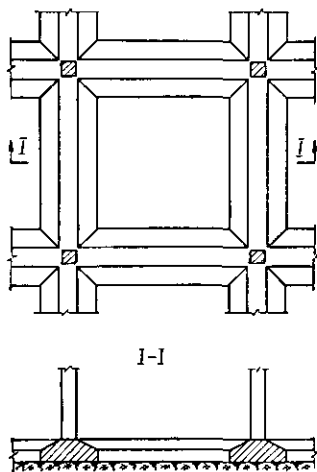


Рис. 36. Фундамент из железобетонных перекрестных балок.

М. И. Горбунова-Посадова [13, 14]. Им предложены точный и приближенный способы расчета перекрестных балок. Под точным подразумевается расчет с учетом жесткости узлов пересечения балок и наличия в этих местах абсолютно жестких участков балок. Точный расчет рекомендуется выполнять методом сил, разрезая систему на ряд отдельных балок. В местах разрезов прикладываются неизвестные усилия в виде сосредоточенных сил, изгибающих и крутящих моментов (рис. 38). Эти усилия определяются на основе равенства деформаций (вертикальных перемещений, углов изгиба и кручения) в местах разрезов. Если все балки системы имеют консольные участки, то в этом случае количество неизвестных равно $6n$, где n — число узлов в системе.

Приближенный способ расчета, рекомендуемый М. И. Горбуновым-Посадовым для практического применения, заключается в следующем.

Вначале вводится допущение о шарнирности узлов системы перекрестных балок и производится расчет, в результате которого определяются значения долей N'_i и N''_i силы N_i , приложенной в узле i . Сила N'_i воспринимается продольной балкой, N''_i — поперечной. Значения этих сил устанавливаются путем решения системы уравнений вида

$$N'_i + N''_i = N_i, \quad (101)$$

$$\sum_j N'_j p_{ij} + \sum_j M'_j \bar{p}_{ij} = \sum_k N''_k \bar{p}_{ik} + \sum_k M''_k \bar{p}_{ik}, \quad (102)$$

составляемых для каждого узла ($i = 1, 2, \dots, n$).

Здесь

p_{ij} — реактивное давление в узле i , вызванное сосредоточенной силой, равной единице, приложенной в узле j той же продольной балки;

p_{ik} — то же от единичной силы в узле k поперечной балки;

\bar{p}_{ij} и \bar{p}_{ik} — то же от изгибающих моментов, равных единице.

Внешние изгибающие моменты, приложенные в узле i , считаются полностью воспринимаемыми соответственно продольной (M'_i) и поперечной (M''_i) балками.

Таким образом, при расчете с допущением о шарнирности узлов приходится решать систему уравнений с $2n$ неизвестными.

Полученные значения долей нагрузки N'_i и N''_i используются для установления предварительного значения

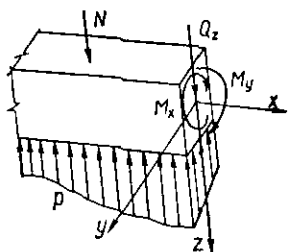


Рис. 37. Усилия, действующие в сечении балки.

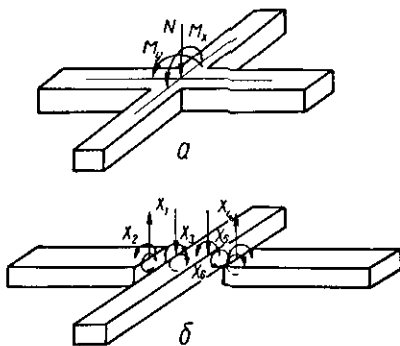


Рис. 38. Элементарная система перекрестных балок:
а — заданная система, б — основная система

реакций основания под каждым узлом системы ($p_{\text{упр}}$). Окончательные значения реактивных давлений получаются путем исключения эффекта взаимного перекрыwania балок. Соответствующие указания по этому вопросу приведены в книге [14].

Установив новые значения долей нагрузок N'_i и N''_i и полагая, что внешние моменты целиком передаются как изгибающие на ту балку, в направлении которой они приложены, строятся эпюры расчетных величин.

Величина крутящих моментов устанавливается, исходя непосредственно из углов наклона балок, получающихся при расчете с предположением о шарнирности узлов. Пренебрегать совершенно крутящими моментами при конструктивном расчете нельзя, так как они вызывают существенное увеличение напряжений в сечениях балок.

В настоящее время, в связи с развитием вычислительной техники, решение систем уравнений с большим числом неизвестных не представляет особых затруднений. Поэтому в ряде случаев можно отказаться от приближенных расчетов и перейти к уточненным. Это, в частности, касается и систем перекрестных балок, лежащих на упругом основании. При использовании ЭЦВМ можно рассчитывать системы перекрестных балок с учетом переменной жесткости основания, тем самым приближая расчет к действительным условиям работы конструкции.

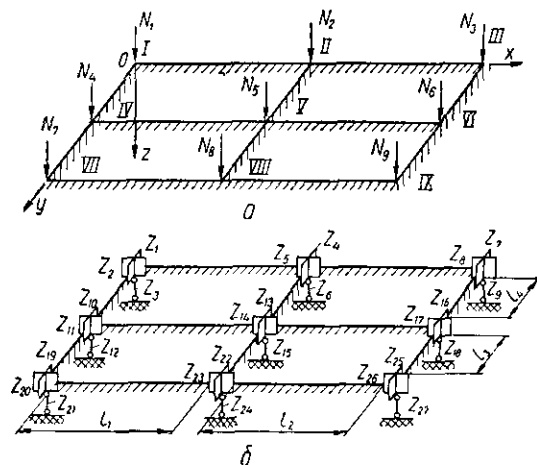
Расчет таких систем целесообразно проводить методом перемещений, а не методом сил. При расчете по методу перемещений основная система уравнений содержит $3n$ неизвестных, в то время как в методе сил — $6n$ неизвестных (если все балки имеют консольные выступы). Поэтому в данном случае следует, по нашему мнению, пользоваться тем методом, который требует минимального числа неизвестных.

Уточненный расчет системы перекрестных балок

Расчет системы перекрестных балок, лежащих на упругом основании, рационально производить методом перемещений. Рассмотрим особенности расчета такой системы по методу перемещений.

При нагрузке, действующей перпендикулярно к плоскости системы (плоскости xOy), перемещение каждого узла характеризуется двумя углами поворота относительно осей x и y и одним линейным перемещением вдоль оси z . Следовательно, количество

Рис. 39. Расчетная схема системы перекрестных балок на упругом основании:
 а — заданная система;
 б — основная система метода перемещений.



неизвестных в свободно лежащей на упругом основании системе перекрестных балок равно утроенному числу узлов пересечения балок, если исходить, как обычно, из предположения о нерастяжимости балок.

Основная система образуется из заданной путем неподвижного закрепления всех узлов пересечения балок. Для закрепления каждого узла необходимо три связи: 1) защемление узла, препятствующее повороту φ^x относительно оси x ; 2) защемление узла против поворота φ^y вокруг оси y и 3) закрепление в виде вертикального опорного стержня, препятствующего линейному перемещению δ узла вдоль оси z . Преобразованная таким путем система представ-

Система уравнений может быть представлена в обычной канонической форме

[illegible]

Напомним, что r_{mh} — это единичные реакции, где первый индекс обозначает связь, в которой реакция возникает, а второй — перемещение, вызвавшее появление указанной реакции. Например, единичная реакция r_{13} представляет собой реакцию первой связи от перемещения третьей. Реакции связей от внешней нагрузки обозначены через R_{mh} , неизвестные перемещения (углы поворота узлов вокруг осей x и y и линейные перемещения в направлении оси z) — Z_i .

Рис. 40. Положительные направления перемещений

Изложим особенности расчета на примере прямоугольной системы перекрестных балок, изображенной на рис. 39.

Система имеет 9 жестких узлов, поэтому количество неизвестных равно $3 \cdot 9 = 27$. Узел I содержит неизвестные Z_1, Z_2, Z_3 ; узел II — Z_4, Z_5, Z_6 ; узел III — Z_7, Z_8, Z_9 и т. д. Условимся в качестве первого неизвестного каждого узла принимать угол поворота узла вокруг оси x ($Z_1, Z_4, Z_7, \dots, Z_{25}$), в качестве второго — угол поворота вокруг оси y ($Z_2, Z_5, Z_8, \dots, Z_{28}$) и в качестве треть-

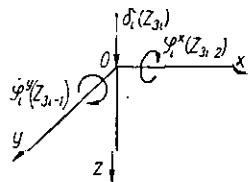


Рис. 40. Положительные направления перемещений

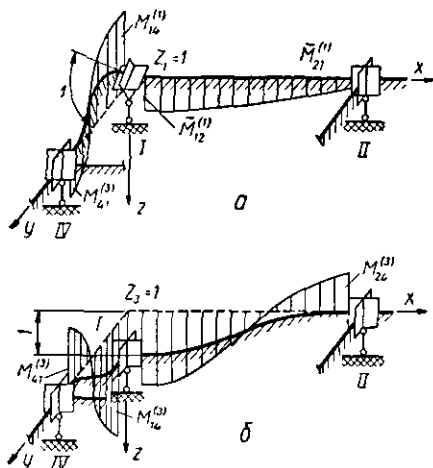


Рис. 41. Эпюры моментов в основной системе от единичных перемещений связей:

а — единичный поворот связи 1 вокруг оси x ; б — единичное линейное перемещение связи 3 вдоль оси z

его — линейное перемещение вдоль оси z ($Z_3, Z_8, Z_9, \dots, Z_{27}$). Обозначая через i номер узла, можем записать в общем виде, что $\varphi_i^x = Z_{3i-2}, \varphi_i^y = Z_{2i-1}, \delta_i = Z_{3i}$.

Дадим поочередно введенным связям единичные перемещения и определим возникающие при этом единичные реакции связей r_{mm} и r_{mh} .

Реакция r_{11} возникает в связи 1 от ее поворота вокруг x на угол $Z_1 = 1$. Единичные эпюры изгибающих и крутящих моментов от поворота этой связи схематически показаны на рис. 41, а. Из условия равновесия узла I находим

$$r_{11} = M_{14}^{(1)} + \bar{M}_{12}^{(1)},$$

где $M_{14}^{(1)}$ — изгибающий момент в заделке связи 1

балки 1—4, возникающий от поворота заделки на единичный угол; балка 1—4 лежит на упругом основании с постоянным или переменным коэффициентом жесткости, и оба конца ее жестко защемлены;

$\bar{M}_{12}^{(1)}$ — крутящий момент в заделке 1 балки 1 — 2 от единичного поворота этой заделки; балка 1—2 лежит на упругом основании постоянной или переменной жесткости и концы ее жестко защемлены.

Момент $M_{14}^{(1)}$ определяется путем решения системы уравнений, приведенных в табл. 10, а $\bar{M}_{12}^{(1)}$ — уравнений табл. 36.

Находим r_{12} — реакцию первой связи от единичного поворота второй связи ($Z_2 = 1$). Эта реакция равна нулю, так как при повороте узла 1 вокруг оси y , что означает поворот связи 2, моменты в перпендикулярно расположенной по отношению к ней связи 1 не возникают.

Определяем r_{13} — реакцию первой связи от единичного перемещения связи 3 (рис. 41, б)

$$r_{13} = -M_{14}^{(3)},$$

где $M_{14}^{(3)}$ — изгибающий момент в заделке 1 балки 1—4, возникающий от вертикального единичного перемещения за-

делки; определяется на основании решения системы уравнений в табл. 10.

Реакция r_{14} первой связи от единичного перемещения четвертой связи представляет собой крутящий момент $\bar{M}_{12}^{(4)}$, возникающий в заделке 1 балки 1—2 от единичного поворота заделки 2

$$r_{14} = \bar{M}_{12}^{(4)}.$$

В силу взаимности реакций

$$\bar{M}_{12}^{(4)} = \bar{M}_{21}^{(1)},$$

где $\bar{M}_{21}^{(1)}$ уже определен из решения системы уравнений для вычисления $\bar{M}_{12}^{(1)}$ (рис. 41, а).

Таблица 37

Структура матрицы коэффициентов

N	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	Z ₅	Z ₆	Z ₇	Z ₈	Z ₉	Z ₁₀	Z ₁₁	Z ₁₂	Z ₁₃	Z ₁₄	Z ₁₅	Z ₁₆	Z ₁₇	Z ₁₈	Z ₁₉	Z ₂₀	Z ₂₁	Z ₂₂	Z ₂₃	Z ₂₄	Z ₂₅	Z ₂₆	Z ₂₇	
1	●		●	●						●		●																
2		●	●		●	●					●																	
3	●	●	●		●	●				●		●																
4	●			●		●	●						●		●													
5		●	●		●	●		●	●					●														
6		●	●	●	●	●		●	●				●		●													
7				●			●		●						●				●									
8					●	●		●	●									●										
9					●	●	●	●	●							●			●									
10	●		●							●		●	●							●		●						
11		●									●	●		●	●						●							
12	●		●							●	●	●		●	●					●		●						
13				●		●				●		●			●	●						●			●			
14					●						●	●		●	●		●	●						●				
15				●		●					●	●	●	●	●		●	●				●			●			
16						●		●				●			●		●									●		●
17							●		●				●	●		●	●	●	●							●		●
18							●		●					●	●	●	●	●	●							●		●
19										●		●								●		●	●					
20											●										●	●		●	●			
21											●		●								●	●	●		●	●		
22													●		●						●			●	●		●	
23														●								●	●		●	●		●
24													●		●							●	●		●	●		●
25														●									●	●		●	●	●
26															●									●	●		●	●
27																●									●	●	●	●

Аналогично определяются и остальные коэффициенты первого уравнения. Свободный член этого уравнения при нагрузке сосредоточенными силами в узлах равен нулю. Если в узле 1 действует сосредоточенный момент M_{1x} , то свободный член $R_{1x} = M_{1x}$ (с соответствующим знаком); от момента, действующего вокруг оси y (M_{1y}), $R_{1y} = 0$.

Таким образом, величины коэффициентов и свободных членов канонических уравнений (103) определяются обычными приемами метода перемещений. Структура матрицы коэффициентов уравнений для рассматриваемой системы приведена в табл. 37. Из этой таблицы видно, что матрица имеет ленточную структуру, количество неизвестных в уравнениях для наружных угловых узлов составляет от 5 до 7, для наружных средних узлов от 6 до 9 и для внутреннего узла от 8 до 11.

Если система симметрична, то ее симметрия может быть использована аналогично тому, как это делается при расчете плоских и пространственных

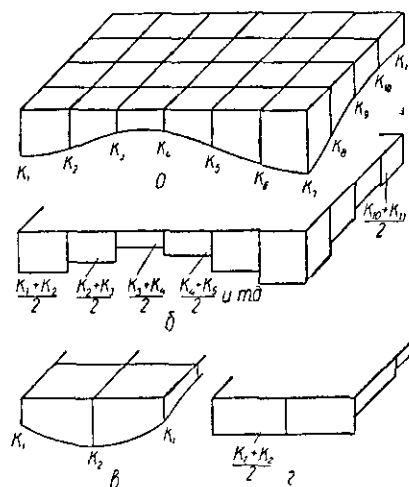


Рис. 42. Эпюры коэффициента жесткости основания системы перекрестных балок:

а — действительная, б — расчетная, в — симметрично-переменная эпюра K ; г — формальная расчетная эпюра K .

рам. При этом, количество основных неизвестных, подлежащих определению, зачастую снижается в несколько раз. Так, например, при наличии в рассматриваемой системе (рис. 39) двух осей симметрии с центром в узле 5, число неизвестных перемещений узлов снижается с 27 до 8.

Радикально упрощается процесс вычисления коэффициентов канонических уравнений (103) в случае, когда коэффициенты жесткости основания отдельных балок — элементов основной системы — постоянны по длине этих балок. В практических расчетах можно фактическую переменную эпюру коэффициента жесткости основания заменять ступенчато переменной эпюрой, как это показано на примере наружных рядов продольных и поперечных балок на рис. 42, а, б. При этом, однако, не следует упускать из вида того, чтобы расчетная ступенчато переменная эпюра правильно отражала характер изменения жесткости основания.

Например, ступенчато переменная эпюра коэффициентов жесткости основания, изображенная на рис. 42, б, в общем вполне соответствует действительной эпюре (рис. 42, а). В то же время формальная замена симметричной относительно среднего узла

двухпролетной балки эпюры коэффициентов жесткости основания (рис. 42, в) на ступенчатую (рис. 42, г) приводит к постоянной эпюре коэффициентов жесткости основания, которая не отражает действительного характера изменения жесткости последнего.

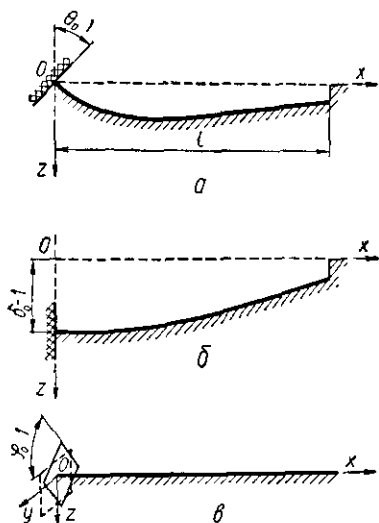


Рис. 43. Виды единичных перемещений балки с двумя жестко зашце́мленными концами:
а — поворот левого конца в плоскости xOz , б — линейное перемещение левого конца плоскости xOz ; в — поворот левого конца вокруг оси x (кручение)

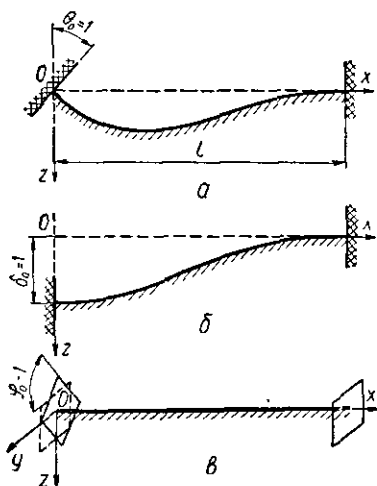


Рис. 44. Виды единичных перемещений балки с одним жестко зашце́мленным концом:
а — поворот заделки в плоскости xOz , б — линейное перемещение заделки в плоскости xOz , в — поворот заделки вокруг оси x (кручение).

В этом случае в расчете необходимо учитывать фактическую эпюру коэффициентов жесткости основания данной двухпролетной балки.

Пользуясь известными решениями для балки постоянного по длине сечения, лежащей на упругом основании постоянной жесткости [20], можно получить готовые формулы реакции, возникающих в элементах основной системы от перемещений концевых сечений. Такие формулы для балки, защемленной двумя концами, и для балки, защемленной только одним концом, приведены ниже. Вывод формул опускаем.

1. Балка постоянного сечения с двумя защемленными концами лежит на упругом основании постоянной жесткости (рис. 43).

При повороте левого конца O балки в плоскости xOz (рис. 43, а) на угол $\theta_0 = 1$ реактивные моменты на концах балки $x = 0$ и $x = l$

$$M_0 = \frac{EI}{l} \lambda \frac{BC - AD}{C^2 - BD}; \quad (104)$$

$$M_l = \frac{EI}{l} \lambda \frac{D}{C^2 - BD}. \quad (105)$$

Опорные реакции

$$Q_0 = -\frac{EI}{l^2} \lambda^2 \frac{AC - B^2}{C^2 - BD}; \quad (106)$$

$$Q_l = -\frac{EI}{l^2} \lambda^2 \frac{C}{C^2 - BD}. \quad (107)$$

При линейном смещении левого конца O в плоскости xOz (рис. 43, б) на величину $\delta_0 = 1$ получим

$$M_0 = -\frac{EI}{l^2} \lambda^2 \frac{AC - B^2}{C^2 - BD}; \quad (108)$$

$$M_l = -\frac{EI}{l^2} \lambda^2 \frac{C}{C^2 - BD}; \quad (109)$$

$$Q_0 = \frac{EI}{l^3} \lambda^3 \frac{4CD + AB}{C^2 - BD}; \quad (110)$$

$$Q_l = \frac{EI}{l^3} \lambda^3 \frac{B}{C^2 - BD}. \quad (111)$$

При повороте левого конца O вокруг оси x на угол $\varphi_0 = 1$ (рис. 43, в) на концах балки возникают такие крутящие моменты

$$\bar{M}_0 = \frac{GI}{l} \frac{\lambda_{кр}}{\operatorname{th} \lambda_{кр}}; \quad (112)$$

$$\bar{M}_l = \frac{GI}{l} \frac{\lambda_{кр}}{\operatorname{sh} \lambda_{кр}}. \quad (113)$$

2. Балка постоянного сечения с одним зашечленным и другим свободно опертым концом лежит на упругом основании постоянной жесткости (рис. 44).

Реактивный момент и опорная реакция при повороте сечения O в плоскости xOz на угол $\theta_0 = 1$ (рис. 44, а)

$$M_0 = \frac{4EI}{l^3} \lambda^3 \frac{BC - AD}{A^2 + 4BD}; \quad (114)$$

$$Q_0 = -\frac{4EI}{l^2} \lambda^2 \frac{AC + 4D^2}{A^2 + 4BD}. \quad (115)$$

Реактивный момент и опорная реакция при смещении сечения O в плоскости xOz на величину $\delta_0 = 1$ (рис. 44, б)

$$M_0 = \frac{4EI}{l^2} \lambda^2 \frac{B^2 - AC}{A^2 + 4BD}; \quad (116)$$

$$Q_0 = -\frac{4EI}{l^3} \lambda^3 \frac{AB + 4CD}{A^2 + 4BD}. \quad (117)$$

Крутящий момент в опорном сечении O при повороте этого сечения вокруг оси x на угол $\varphi_0 = 1$ (рис. 44, в)

$$\overline{M}_0 = \frac{G\overline{I}}{l} \lambda_{кр} \operatorname{th} \lambda_{кр}. \quad (118)$$

В приведенных формулах приняты следующие обозначения: приведенная длина балки при изгибе

$$\lambda = l \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}};$$

приведенная длина балки при кручении

$$\lambda_{кр} = l \sqrt{\frac{K_{\varphi} b^3}{24GI}};$$

A, B, C, D — гиперболо-тригонометрические функции, определяемые по таблицам [20] в зависимости от λ ;

$\operatorname{sh} \lambda_{кр}$ и $\operatorname{th} \lambda_{кр}$ — гиперболические синус и тангенс, значения которых даются в справочниках по математике;

K — погонный коэффициент жесткости основания при равномерном сжатии, имеющий размерность (сила) \times (длина) $^{-2}$;

K_{φ} — коэффициент жесткости основания при повороте фундамента;

b — ширина подошвы балки;

I — момент инерции сечения при изгибе;

\overline{I} — то же при кручении.

Приближенные методы расчета

Принимая допущение о шарнирном опирании балок друг на друга, можно в 3 раза снизить количество неизвестных по сравнению с расчетом по методу перемещений с учетом жесткости узлов. При этом, конечно, снижается и точность получаемых решений; однако в случаях, когда имеются сугубо приближенные исходные данные, нет смысла производить точный расчет и можно ограничиться излагаемыми ниже приближенными способами расчета.

Рассмотрим систему перекрестных балок, показанную на рис. 39, а. При наличии шарниров в узлах для ее расчета целесообразно использовать метод сил.

За основную систему принимается система, получающаяся из заданной путем удаления всех шарниров. В качестве основных неизвестных берутся усилия X_i , действующие в отброшенных шарнирах. Следовательно, основная система представляет собой совокупность свободно лежащих на упругом основании балок, нагруженных реакциями отброшенных связей и внешней нагрузкой (рис. 45). Все неизвестные пронумерованы от 1 до 9 в соответствии с нумерацией узлов.

Канонические уравнения в общем виде

[illegible]

Смысл коэффициентов и свободных членов этих уравнений тот же, что и в плоских или пространственных стержневых си-

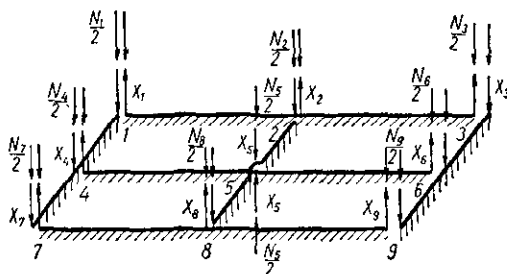


Рис. 45. Основная система при допущении о шарнирности узлов.

положения неизвестных X_i от единичных воздействий и внешней нагрузки.

Необходимые решения в виде готовых систем уравнений имеются в табл. 5.

Использование симметрии системы производится обычным путем. Дополнительные упрощения в расчете получаются при наличии в основной системе балок, которые могут быть отнесены к категории бесконечно длинных. В последнем случае при составлении уравнений допускается учитывать влияние только тех воздействий от неизвестных сил X , и внешней нагрузки, которые находятся от рассматриваемого узла на приведенном расстоянии

$$\lambda' = d \sqrt[4]{\frac{K_{cp}}{4EI}} \leq 2, \quad (120)$$

где d — действительное расстояние от нагрузки до данного узла.

Величину крутящих моментов, учитываемых при подсчете арматуры, можно установить, исходя непосредственно из углов наклона балок, полученных из описанного выше приближенного расчета с предположением о шарнирности узлов. Способ приближенного определения крутящих моментов подробно изложен в работе [14].

В случаях, когда коэффициенты жесткости основания под отдельными балками основной системы могут быть приняты, без существенных погрешностей, постоянными, порядок вычисления коэффициентов и свободных членов уравнений (119) радикально упрощается. При постоянном по длине балки коэффициенты жест-

кости основания величины δ_{ik} и Δ_{iv} в функции от нагрузок X_i , g , N и M , а также от жесткости балки и основания легко вычисляются по таблицам реактивных давлений (с переводом давлений в перемещения по формуле $\delta = \frac{P}{K}$), приведенных в гл. II (табл. 12—25). После того, как будут найдены значения X_1 , X_2 , ..., X_n из решения системы уравнений (119), задача сводится к расчету отдельных балок, лежащих на упругом основании постоянной жесткости, и нагруженных силами X_i и внешней активной нагрузкой. Эта за-

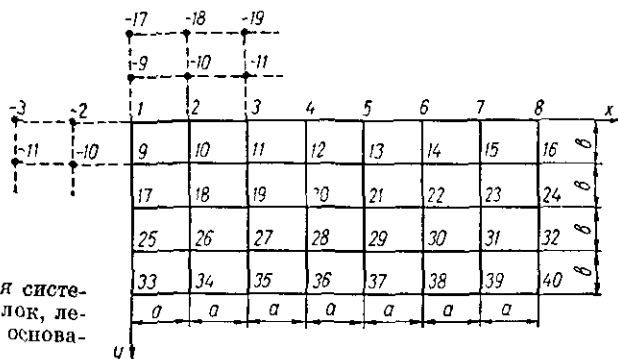


Рис. 46. Регулярная система перекрестных балок, лежащих на упругом основании.

дача также легко решается с помощью упомянутых таблиц, по которым находятся распределение реактивных давлений, осадки, изгибающие моменты и перерезывающие силы.

В практике приходится часто иметь дело с так называемыми регулярными системами перекрестных балок. Это системы, состоящие из большого числа продольных и перпендикулярных к ним поперечных балок, расположенных на равных расстояниях a и b (рис. 46). Приближенный расчет систем такого рода целесообразно производить методом конечных разностей.

Полагая, что в узлах пересечения балок имеет место свободное опирание одной балки на другую, можно записать следующее дифференциальное уравнение изгиба системы перекрестных балок, лежащей на упругом основании постоянной или переменной жесткости [49],

$$EI_x \frac{a}{b} \frac{d^4 w}{dx^4} + EI_y \frac{d^4 w}{dy^4} + aK(x, y)w = ag(x, y), \quad (124)$$

где w — прогиб балки, положительное направление вниз;

E — модуль упругости материала балки;

I_x — момент инерции балок, параллельных оси x , считается постоянным по длине каждой балки;

I_y — то же параллельных оси y ;

$K(x, y)$ — коэффициент жесткости основания (кг/см^3 или т/м^3);

$g(x, y)$ — внешняя распределенная нагрузка на квадрат длины, положительное направление вниз.

Заменяя производные в приведенном уравнении конечно-разностными отношениями по формуле (40г), получим систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными прогибами узлов пересечения балок w_1, w_2, \dots, w_n .

Проиллюстрируем решение на примере системы, показанной на рис. 4б. Пронумеруем все узлы, как указано на рисунке. Всего имеется 40 узлов, следовательно, необходимо составить 40 конечно-разностных уравнений для определения прогибов w_1, w_2, \dots, w_{40} . Если система имеет две оси симметрии, то в этом случае необходимо составить всего 12 уравнений.

Составим разностное уравнение для узла 1. Пользуясь формулой (40 г), будем иметь

$$\frac{EI_{x1}}{ba^3} (w_{-3} - 4w_{-2} + 6w_1 - 4w_2 + w_3) + \frac{EI_{y1}}{b^4} (w_{-17} - 4w_{-9} + w_1 - 4w_9 + w_{17}) + aK_1 w_1 = ag_1. \quad (122)$$

Умножая обе части уравнения на b и вводя обозначения

$$T_{xi} = \frac{EI_{xi}}{a^3}, \quad T_{yi} = \frac{EI_{yi}}{b^3}, \quad N_i = abg_i, \quad \bar{K}_i = abK_i,$$

перепишем уравнение (122) в виде

$$T_{x1} (w_{-3} - 4w_{-2} + 6w_1 - 4w_2 + w_3) + T_{y1} (w_{-17} - 4w_{-9} + 6w_1 - 4w_9 + w_{17}) + \bar{K}_1 w_1 = N_1. \quad (122')$$

Здесь N_1 представляет собой сосредоточенную силу, действующую в узле 1.

Аналогично для узла 2 получим

$$T_{x2} (w_{-2} - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4) + T_{y2} (w_{-18} - 4w_{-10} + 6w_2 - 4w_{10} + w_{18}) + \bar{K}_2 w_2 = N_2. \quad (123)$$

Поскольку момент инерции отдельной балки постоянен по ее длине, то $T_{x1} = T_{x2} = T_{x3} = \dots = T_{x8}$, но T_{y2} может быть не равным T_{y1} , так как первый параметр относится к балке 1—33, а второй — к балке 2—34.

Уравнение для узла 20

$$T_{x0} (w_{18} - 4w_{19} + 6w_{20} - 4w_{21} + w_{22}) + T_{y20} (w_4 - 4w_{12} + 6w_{20} - 4w_{28} + w_{36}) + \bar{K}_{20} w_{20} = N_{20} \text{ и т. д.} \quad (124)$$

Нетрудно заметить, что процедура составления уравнений рассматриваемого метода расчета чрезвычайно проста. Коэффициенты при неизвестных вычислять не требуется, они автомати-

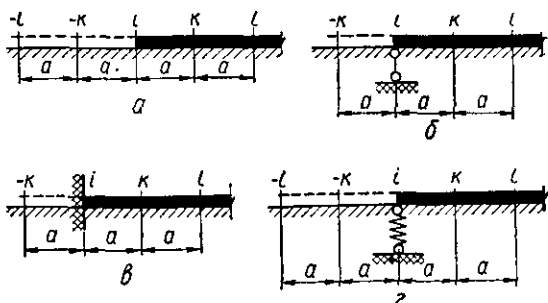
чески записываются по единому шаблону. Дополнительные неизвестные прогибы фиктивных законтурных узлов (w_{-2} , w_{-3} , w_{-3} и т. д.), появляющиеся в уравнениях для контурных и предконтурных узлов, легко определяются из граничных условий на концах балок.

Рассмотрим основные граничные условия на концах балки.

1. Конец балки свободно лежит на упругом основании (рис. 47, а).

Рис. 47. Основные граничные условия на концах балки:

а — свободный конец; б — шарнирно-опертый конец; в — жесткозащемленный конец; г — опирание на сосредоточенную упруго смещающую опору.



В этом случае изгибающий момент и поперечная сила в сечении i равны нулю. Пользуясь выражениями (41а) и (41б), для точки i можем написать

$$w_{-k} - 2w_i + w_k = -\frac{a^2}{EI_i} M_i = 0; \quad (125)$$

$$-w_{-l} + 2w_{-k} - 2w_k + w_l = -\frac{2a^3}{EI_i} Q_i = 0, \quad (126)$$

откуда

$$w_{-k} = 2w_i - w_k; \quad (127)$$

$$w_{-l} = 4w_i - 4w_k + w_l. \quad (128)$$

2. Конец балки шарнирно оперт на неподвижную сосредоточенную опору (рис. 47, б).

Граничные условия: $M_i = 0$; $w_i = 0$.

Из уравнения (125), учитывая, что $w_i = 0$, находим

$$w_{-k} = -w_k. \quad (129)$$

Значение w_{-l} в данном случае в уравнениях не фигурирует, так как для точки i не требуется записывать разностное уравнение ($w_i = 0$).

3. Конец балки жестко зашпемлен и не имеет смещений в вертикальном направлении (рис. 47, в).

Граничные условия: $\theta_i = 0$; $w_i = 0$.

Пользуясь уравнением (40а), выражающим в конечно-разностной форме угол поворота сечения балки, получим

$$\frac{1}{2a} (-w_{-h} + w_h) = 0,$$

откуда

$$w_{-h} = w_h. \quad (130)$$

4. Конец балки шарнирно оперт на сосредоточенную упруго-податливую опору (рис. 47, в).

Граничные условия: $M_i = 0$; $Q_i = C_i w_i$, где C_i — жесткость сосредоточенной опоры (кг/см или т/м).

Из первого условия находим (см. формулу 125)

$$w_{-h} = 2w_i - w_h.$$

Используя формулу (126), записываем второе условие

$$-w_{-l} + 2w_{-h} - 2w_h + w_i = -\frac{2a^3}{EI_i} C w_i,$$

откуда

$$w_{-l} = \left(4 + \frac{2Ca^3}{EI_i}\right) w_i - 4w_h + w_l. \quad (131)$$

Полученные выражения для прогибов законтурных точек позволяют выразить их через основные неизвестные и тем самым исключить из общей системы линейных уравнений.

Например, приведенные выше уравнения для узлов 1, 2 и 20, с учетом граничных условий в виде свободного опирания концов балок на упругое основание, запишутся в окончательном виде следующим образом.

Для узла 1

$$(2T_{x1} + 2T_{y1} + \bar{K}_1) w_1 - 4T_{x1} w_2 + 2T_{x1} w_3 - 4T_{y1} w_9 + 2T_{y1} w_{17} = N_1;$$

для узла 2

$$6T_{x2} w_1 + (5T_{x2} + 2T_{y2} + \bar{K}_2) w_2 - 4T_{x2} w_3 + T_{x2} w_4 - 4T_{y2} w_{10} + 2T_{y2} w_{18} = N_2;$$

для узла 20

$$T_{y20} w_4 - 4T_{y20} w_{12} + T_{x20} w_{18} - 4T_{x20} w_9 + (6T_{x20} + 6T_{y20} + \bar{K}_{20}) w_{20} - 4T_{x20} w_{21} + T_{x20} w_{22} - 4T_{y20} w_{28} + T_{y20} w_{36} = N_{20}.$$

В целом получается система девятичленных уравнений с n неизвестными (n — число узлов). В этой системе уравнения для угловых узлов имеют по 5 неизвестных, для смежных с угловыми наружных узлов — по 6, для средних наружных узлов и для смежных с угловыми по диагонали внутренних узлов (узлы 10, 15, 26, 31) — по 7, для внутренних приконтурных узлов — по 8 и для остальных внутренних узлов — по 9 неизвестных.

После определения w_1, w_2, \dots, w_n вычисляются изгибающие моменты и поперечные силы по обычным разностным формулам (41а) и (41б).

РАМНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Общие сведения

В строительстве широко применяются рамные конструкции. Как известно, рамой называется упругая система, состоящая из прямолинейных или криволинейных элементов, взаимно связанных в узлах. Отдельные элементы рамы могут соединяться между собой при помощи жестких соединений в узлах, либо на шарнирах. Рамные конструкции являются, как правило, статически неопределимыми системами. Примерами рам могут служить поперечные конструкции одноэтажных производственных зданий, состоящие из колонн и ригелей, каркасы многоэтажных гражданских и производственных зданий, некоторые типы мостов, эстакады, рамные фундаменты под оборудование и др.

подавляющее большинство рамных конструкций возводится на сжимаемых однородных и неоднородных грунтовых основаниях. случаи, когда каркасные сооружения имеют практически несжимаемые основания (скальные грунты), весьма редки в строительной практике. Стойки рам опираются на фундаменты, которые могут выполняться отдельными под каждую стойку (колонну), ленточными под ряды колонн и сплошными плитными под все здание или часть его. Наиболее распространенными являются отдельные фундаменты. Ленточные и плитные фундаменты применяются при слабых и неоднородных грунтах в тех случаях, когда нецелесообразно или невозможно применять отдельные фундаменты.

Рамы, стоящие на сжимаемом основании, деформируются совместно с ним под действием приложенных к рамам нагрузок. Неравномерные осадки грунтов являются причиной возникновения деформаций сооружений. Есть немало примеров появления трещин в элементах рам под влиянием неравномерных осадок фундаментов, а также отдельных разрушений сооружений [11]. Несмотря на это, совместная работа рамы, фундамента и грунтового основания при расчете рам обычно не учитывается, что и приводит иногда к указанным повреждениям.

При расчете рам колонны считаются жестко заделанными или шарнирно-опертыми в уровне фундамента, т. е. фундаменты предполагаются неподвижными. Такая расчетная схема соответствует

только случаю несжимаемого основания. В наиболее массовом случае сжимаемых оснований фундаменты перемещаются, что вызывает неучитываемые обычным расчетом изменения в напряженно-деформированном состоянии рам.

Действующие нормы проектирования оснований зданий и сооружений указывают два пути исследования влияния деформации основания на работу надфундаментных конструкций [40].

Первый путь заключается в изучении в натуре деформаций оснований выстроенных сооружений и сопоставлении этих деформаций с состоянием конструкции и условиями их эксплуатации. Полученные таким путем предельные величины деформаций оснований фундаментов каркасов зданий, специально не приспособленных к неравномерным осадкам, приведены в нормах. Под предельной понимается такая величина деформаций оснований, при которой достигается предел эксплуатационной пригодности надфундаментной конструкции.

При проектировании необходимо определять абсолютные величины осадок для целого ряда фундаментов, имеющих разные нагрузки, размеры и грунтовые условия. При этом осадки вычисляются без учета жесткости надфундаментных конструкций, как для отдельно стоящих, не связанных с другими элементами сооружения, фундаментов. По полученным данным находят разность осадок отдельных фундаментов и среднюю осадку здания и сравнивают эти величины с их предельными величинами, указанными в нормах [38].

Недостатком рассмотренного пути установления предельных деформаций основания является то, что данные норм могут использоваться только при проектировании оснований фундаментов зданий, перечисленных в таблицах.

Второй путь выявления предельных деформаций оснований сооружений состоит в теоретическом исследовании напряженного состояния конструкций, вызываемого как действующими на них нагрузками, так и деформациями основания. Практически это сводится к расчету рам на деформируемом основании с учетом основных свойств грунтов и материалов конструкций. Сочетание второго пути с первым является наиболее желательным, поскольку оно позволяет уточнить теоретические методы и одновременно охватить нормами более широкий круг конструкций. Особое значение приобретает расчетно-теоретический путь исследований при оптимальном или вариантном проектировании сооружений.

В настоящей главе рассматриваются вопросы, связанные с определением усилий в рамах при учете податливости оснований, т. е. с расчетом рам на упругих опорах.

Необходимо отметить, что статический расчет рам на упругих опорах принципиальных трудностей не составляет: он может быть выполнен любым методом, имеющимся в арсенале строительной механики стержневых систем (методы сил, деформаций и др.).

Современное развитие машинной вычислительной техники еще более упрощает эту задачу. Поэтому главным в этом вопросе является: а) правильный выбор исходных данных для расчета и прежде всего характеристик упругости основания; б) изучение влияния податливости основания на напряженное состояние различных типов рам.

Расчету рам с учетом податливости оснований посвящено сравнительно небольшое количество печатных работ. Наиболее полное изложение вопросов расчета рам классическими методами сил и перемещений содержится в книге проф. В. А. Киселева [20]. В. А. Киселевым рассмотрены в основном рамы со сплошными балочными фундаментами, лежащие на упругом винклеровом основании. В качестве примера приведен расчет П-образной рамы на отдельных фундаментах. При расчете этой рамы вычисление осадок и углов поворота фундамента производилось при одном и том же значении коэффициента постели основания, что, как было показано в главе I, не соответствует действительности; коэффициент постели для расчета осадок не равен коэффициенту постели для определения углов поворота.

В работе А. В. Коваленко [23], посвященной расчету рам способом распределения моментов, также рассмотрен пример расчета П-образной рамы с учетом упругого заземления стоек в фундаментах. При этом учитывался только поворот фундамента, а влияние вертикальных перемещений не рассматривалось.

В двух статьях Г. В. Омадзе [34, 35] приведены схематические указания по расчету рам на отдельных и ленточных фундаментах с учетом упругих вертикальных перемещений опор. Влияние поворота фундамента не изучалось. Для расчета рам с учетом осадок опор предложен разработанный автором ранее метод моментных отношений.

Из зарубежных работ можно отметить статьи А. Магияра [51] и Е. Хансена [50], где указывается на необходимость учета упругой заделки стоек рам. Рекомендуются производить расчет методом Кросса, причем рассматривается лишь влияние упругого поворота фундамента. Примеры расчета касаются П-образных рам.

Экспериментальных исследований совместной работы оснований, фундаментов и рам проведено мало, однако эти исследования выявили существенное влияние податливости основания на работу рам и фундаментов.

Весьма интересные данные содержатся в работе Е. И. Беленя и Л. В. Клепикова [4], посвященной изучению напряженного состояния поперечных рам стальных каркасов промышленных зданий при учете деформаций основания. Результаты лабораторных и натурных исследований показали, что совместная работа основания и поперечных рам промышленных зданий со стальным каркасом является одним из важнейших факторов, определяющих поведение этих рам под нагрузкой.

Широкое распространение рамных фундаментов привело к необходимости изучения поведения таких систем при действии динамических нагрузок. В СССР и за рубежом были проведены опыты над моделями плоских и пространственных железобетонных рам, проведены испытания патурных и наблюдения за существующими рамными фундаментами под машины в условиях эксплуатации. Краткая сводка результатов экспериментального изучения работы фундаментов при действии динамических нагрузок содержится в книге О. А. Савинова [37]. Основной вывод автора состоит в том, что нельзя упрощать решение задачи о расчете рамных фундаментов за счет полного пренебрежения влиянием упругости основания, так как это может привести к нарушению эксплуатационной пригодности фундаментов и в отдельных случаях даже к их разрушению.

Расчетная модель упругой опоры рамы

Расчетная схема надфундаментной рамной конструкции сооружения с отдельными фундаментами принимается с общеизвестными упрощениями в виде упругой рамы. Что касается расчетной схемы фундамента, то при ее выборе мы используем результаты экспериментальных исследований, приведенных в работе [4].

Прежде всего необходимо установить расположение центра поворота фундамента, представляющего собой точку, не перемещающуюся только в горизонтальном направлении и расположенную

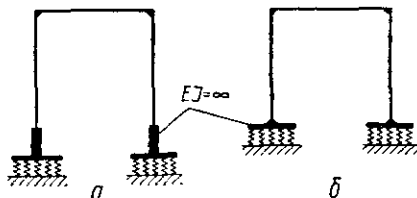


Рис. 48. Расчетные схемы рам на сжимаемом основании:

a — при расположении центра поворота фундамента на уровне его подошвы; *б* — то же на уровне верхнего обреза фундамента.

на вертикальной оси, проходящей через центр тяжести подошвы. При обычном расчете рам принимается, что отдельные стойки (колонны) имеют защемление в нижних сечениях на уровне верхнего обреза фундамента. В случае учета податливости основания положение центра поворота зависит от соотношения момента и горизонтальной поперечной силы, возникающих в уровне фундамента.

На основании результатов исследований [4] можно принимать центр поворота осредненно на уровне подошвы фундамента. В этом случае расчетная схема опорной части колонны должна приниматься в виде стержня, имеющего в пределах высоты фундамента бесконечную жесткость (рис. 48, *a*). В целях упрощения расчетной схемы можно также принимать центр поворота на уровне верхнего обреза фундамента (рис. 48, *б*). Ряд численных примеров расчета показал, что при обычных для поперечных рам каркасов производственных зданий соотношениях между высотами

колонн и фундаментов влияние местоположения центра поворота сравнительно мало сказывается на напряженном состоянии рамы.

При расчете рамы необходимо определять перемещения ее элементов, связанные с деформацией упругого основания. В случае рам на отдельных фундаментах эти перемещения могут быть найдены с помощью формул

$$S = \frac{N}{K_z F_{\Pi}} \quad (132)$$

и

$$\varphi = \frac{M}{K_{\varphi} I_{\Pi}}, \quad (133)$$

выражающих соответственно вертикальное перемещение и угол поворота собственно фундамента, см. формулы (17) и (19). Здесь F_{Π} — площадь подошвы фундамента (ab , см. рис. 6); I_{Π} — момент инерции этой площади в плоскости рамы $\frac{ba^3}{12}$.

Тангенс угла поворота фундамента, фигурирующий в формуле (19), вследствие малости заменен самим углом φ .

Расчет рам можно несколько упростить, если упругое основание под фундаментом заменить эквивалентной по жесткости однопролетной балкой (рис. 49). Тогда процесс вычисления коэффициентов канонических уравнений метода сил или метода перемещений становится таким же, как и при расчете рам с неподвижными опорами. Это дает возможность использовать существующие программы расчета рам на электронных вычислительных машинах без каких-либо добавлений и переделок.

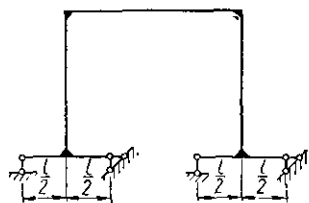


Рис. 49 Расчетная схема рамы на упругих опорах.

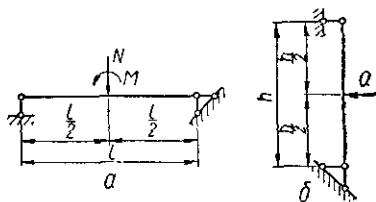


Рис. 50. Схемы эквивалентных балок:

a — для моделирования вертикальной осадки и поворота фундамента; b — для моделирования горизонтального сдвига фундамента

Расчетные параметры балки, имитирующей свойства упругого основания, определяются на основании следующих соображений.

Рассмотрим однопролетную шарнирно опертую балку пролетом l , загруженную в центре пролета сосредоточенной силой N и моментом M (рис. 50, a). Прогиб S центра балки от действия силы N вычисляется по формуле

$$S = \frac{Nl^3}{48 [EI]}, \quad (134)$$

а угол поворота φ среднего сечения балки, вызванный воздействием момента M , по формуле

$$\varphi = \frac{Ml}{12[EI]}, \quad (135)$$

где $[EI]$ — изгибная жесткость балки.

Поскольку по условию прогиб и угол поворота центра балки должны быть равны соответствующим перемещениям основания фундамента, то выражения (132) и (134), а также (133) и (135) необходимо взаимно приравнять

$$\left. \begin{aligned} \frac{N}{K_z F} &= \frac{Nl^3}{48[EI]}; \\ \frac{M}{K_\varphi I_n} &= \frac{Ml}{12[EI]}. \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

Решая полученную систему уравнений относительно l и $[EI]$, получим

$$l = a \sqrt{\frac{K_\varphi}{3K_z}}; \quad (137)$$

$$[EI] = \frac{I_n l K_\varphi}{12}. \quad (138)$$

Отношение $\frac{K_\varphi}{K_z}$ в формуле (137) можно заменить, согласно (23), отношением коэффициентов $\frac{\omega_\varphi}{\omega_z}$, определяемых по табл. 2 в зависимости от соотношения сторон подошвы фундамента.

Тогда будем иметь

$$l = a \sqrt{\frac{\omega_\varphi}{3\omega_z}}. \quad (139)$$

Коэффициент жесткости по углу поворота K_φ вычисляется по формуле (20).

Таким образом, пролет l и жесткость $[EI]$ эквивалентной балки можно получить, пользуясь выражениями (138) и (139); перемещения центра балки от воздействия N и M будут равны перемещениям фундамента, расположенного на основании с жесткостными характеристиками K_z и K_φ .

Если требуется учесть горизонтальный сдвиг фундамента от воздействия силы Q , то в этом случае податливость основания в горизонтальном направлении можно моделировать вертикально расположенной балкой согласно рис. 50, б. Горизонтальное перемещение центра балки

$$\Delta = \frac{Qh^3}{48EI};$$

горизонтальный сдвиг фундамента в соответствии с формулой (21)

$$\Delta = \frac{Q}{K_x F_{\Pi}}. \quad (140)$$

Приравнивая оба выражения друг к другу, находим

$$\frac{h^3}{EI} = \frac{48}{K_x F_{\Pi}}. \quad (141)$$

Задаваясь произвольно каким-либо одним параметром балки (h или EI), из соотношения (141) получим значение другого параметра.

Рис. 51. Расчетная модель упругой опоры рамы: 1 — балка, моделирующая горизонтальный сдвиг фундамента; 2 — стойка рамы; 3 — балка, моделирующая вертикальную осадку и поворот фундамента.

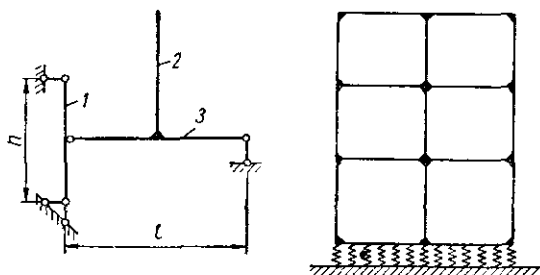


Рис. 52. Расчетная схема рамы со сплошными фундаментами.

Расчетная модель упругой опоры рамы при учете горизонтального сдвига фундамента изображена на рис. 51. Такая модель может приниматься при расположении центра поворота фундамента вне точки пересечения осей колонны и горизонтальной эквивалентной балки. Учитывая, однако, невысокую точность исходных данных, характеризующих деформативные свойства грунта, а также схематизацию действительной рамной конструкции, считаем целесообразным в практических расчетах пользоваться только схемами, подобными приведенной на рис. 49.

Выше были рассмотрены вопросы, связанные с выбором расчетной схемы рамы на отдельных фундаментах. Что касается рам со сплошными ленточными или плитными фундаментами, то их расчетные схемы имеют обычный вид рам, отдельные стержни которых лежат на сплошном упругом основании постоянной или переменной жесткости (рис. 52).

Расчет рам на отдельных фундаментах

Раму с податливыми опорами можно трактовать как обычную стержневую систему, у которой опоры имеют заданные упругие характеристики. Реакции, возникающие в упругих опорах, пропорциональны деформациям. При деформировании рамы реакции таких опор совершают работу, которая относится к работе внутренних сил.

В связи с этим заметим, что не следует смешивать (что иногда встречается) расчет рам, имеющих упругие опоры, с расчетом рам на заданные перемещения опор. В первом случае перемещения опор являются величинами неизвестными и определяются только в результате расчета всей рамы с учетом податливости опор. Во втором случае перемещения опор рассматриваются аналогично внешней нагрузке или температурным воздействиям как заранее известные величины.

Для определения длины и жесткости опорной балки необходимо знать размеры подошвы фундамента и значение коэффициента жесткости K_{ϕ} .

Размеры подошвы фундамента устанавливают из расчета основания. Фундамент следует проектировать квадратным симметричным относительно оси колонны, если нагрузка к нему приложена центрально или, если краевое давление на грунт от внецентренной нагрузки не превышает нормативное на грунт не более чем на 20%. В таких условиях работают фундаменты почти всех типов многоэтажных производственных зданий и одноэтажных корпусов без кранов и с подвесными кран-балками с сетками колонн от 12×6 до 24×12 м. Для рамных конструкций, у которых колонны испытывают значительные изгибающие моменты, подошва фундамента может быть принята прямоугольной формы с отношением сторон до 1 : 2.

Порядок определения размеров подошвы фундамента состоит в следующем.

1. Из данных статического расчета рам при неподвижных опорах выбирают наибольшие величины нормативных усилий N , M и Q , действующих на фундамент. Если такой расчет не выполнялся, то нагрузки определяют приближенно без учета неразрезности конструкций.

2. По данным инженерно-геологических изысканий устанавливают вид грунта и принимают нормативные характеристики механических свойств грунтов основания.

3. Исходя из нагрузок, напластований и характеристик грунтов, назначается глубина заложения и определяются размеры подошвы фундамента. При найденных размерах подошвы фундамента должны удовлетворяться условиям

$$p_{\text{ср}} \leq R^n, \quad (142)$$

$$p_{\text{max}} \leq 1,2R^n, \quad (143)$$

где $p_{\text{ср}}$ — среднее давление по подошве фундамента от основного сочетания нормативных нагрузок;

p_{max} — максимальное давление под краем подошвы фундамента для самого невыгодного возможного загружения фундамента нормативными нагрузками при действии основного сочетания нагрузок;

R^n — нормативное давление на грунт основания, определяемое по формуле (10) или (11).

Детальные указания по технике подбора размеров подошвы центрально и внецентренно нагруженных фундаментов даны в пособиях [38, 40] и др.

Зная размеры подошвы фундамента и величину среднего давления на грунт, можно определить осадку фундамента S , а затем по формуле (7) вычислить значение коэффициента жесткости K_z . Если грунт в пределах активной зоны однородный, то для определения K_z можно воспользоваться формулой (18). Значение коэффициента жесткости по углу поворота находится согласно (23) по формуле

$$K_\varphi = K_z \frac{\omega_\varphi}{\omega_z}. \quad (144)$$

Имея размеры фундамента и коэффициент жесткости K_φ , по формулам (138) и (139) вычисляют параметры опорной балки: длину l и изгибную жесткость EI .

В результате статического расчета рамы на податливом основании усилия в опорных узлах получаются более или менее отличными от принятых для предварительного определения размеров подошвы фундамента. Поэтому необходима проверка и корректировка размеров фундамента. При значительных расхождениях может потребоваться пересчет рамы с учетом новых значений a , b и K_φ .

Вообще говоря, податливость основания можно в определенных пределах регулировать с помощью назначения тех или иных размеров фундаментов в пределах, разумеется, условий (142) и (143). Так, например, увеличением размеров фундаментов можно несколько уменьшить их осадку.

Такой прием позволяет при необходимости производить уравнивание осадок отдельных фундаментов.

При проектировании рамных конструкций на податливом основании следует рассматривать несколько возможных вариантов устройства фундаментов, определять их деформативные свойства и с учетом этих свойств рассчитывать надфундаментные конструкции. В одних случаях, например, при обычных фундаментах на естественном основании могут потребоваться специальные конструктивные меры для усиления рамных конструкций; в других, наоборот, рамы усиливать не требуется, но фундамент получается чрезмерно сложным и дорогим.

Окончательный выбор вида фундамента следует производить по результатам проведенных статических расчетов и сопоставления вариантов конструкций рам с фундаментами по технико-экономическим показателям.

Выше отмечалось, что расчет рам может быть выполнен любым из методов строительной механики стержневых систем. Остановим-

ся кратко на расчете рам с упругими опорами общеизвестными методами сил и перемещений.

При расчете по методу сил наличие податливых опор не увеличивает степень статической неопределимости рам, что легко усматривается из расчетной схемы рамы, показанной на рис. 49. Расчет начинается с выбора основной системы, получаемой из заданной путем удаления того или иного количества лишних связей

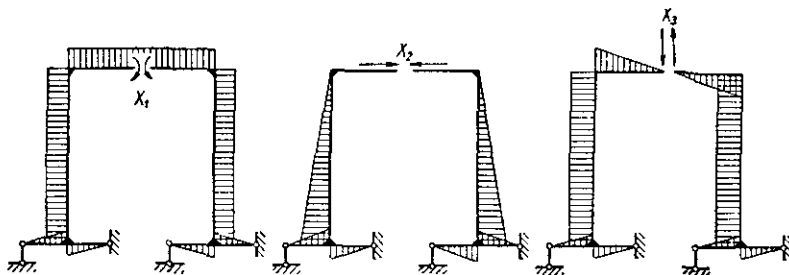


Рис. 53. Эпюры моментов в основной системе метода сил.

и заменой последних соответствующими неизвестными силами X_1, X_2, \dots, X_n . От действия каждой силы X в основной системе строятся эпюры изгибающих моментов, причем эпюры строятся и на опорных балках. В качестве примера на рис. 53 приведены эпюры моментов в основной системе рамы, изображенной на рис. 49. По эпюрам M производится вычисление коэффициентов канонических уравнений метода сил. В результате решения этих уравнений находятся значения неизвестных сил X и строятся окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Подробные указания по технике расчета рам методом сил

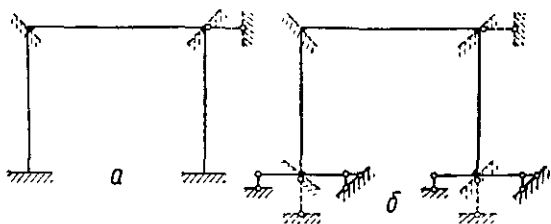


Рис. 54. Основные системы при расчете рам методом перемещений: а — рама с неподвижными опорами; б — рама с податливыми опорами.

имеются в любом учебнике и справочных пособиях по строительной механике.

Расчет рам с упругими опорами по методу перемещений (деформаций) также не отличается от расчета обычных рам с неподвижными опорами этим же методом. Однако здесь, при учете податливости опор, количество неизвестных увеличивается, так как добавляются неизвестные угловые и линейные перемещения опор-

ных узлов рамы. Так, например, число неизвестных в схеме рамы с неподвижными опорами (рис. 54, а) равно трем, а в раме с податливыми опорами (рис. 54, б) — семи. Несмотря на это, расчет сложных рам с упругими опорами удобнее вести методом перемещений, поскольку последний реализован во многих программах расчета рам на электронных цифровых вычислительных машинах.

Расчет рам на сплошных фундаментах

Расчетная схема рамы на сплошных фундаментах изображена на рис. 52. С точки зрения статики сооружений такая рама представляет собой систему с бесконечным числом лишних связей. Однако, если считать, что для элементов рамы, лежащих на упругом основании, известны решения в части перемещений и усилий, то в этом случае расчет рамы может быть выполнен обычными способами.

Для большей наглядности по описанию особенностей расчета рам на сплошных фундаментах рассмотрим в качестве примера замкнутую прямоугольную раму, лежащую на упругом основании (рис. 55, а).

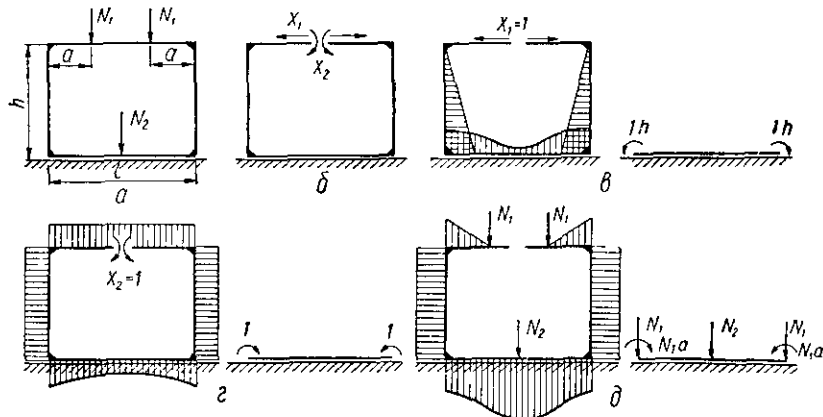


Рис. 55. К расчету рамы на сплошном фундаменте методом сил:
а — расчетная схема рамы, б — основная система, в-г — эпюры моментов от внутренних и внешних сил

При расчете указанной рамы методом сил выбирается основная система. На рис. 55, б показана одна из возможных основных систем, полученная путем разреза верхнего ригеля рамы по оси симметрии. По условию симметрии системы и нагрузки в месте разреза имеется лишь два неизвестных: нормальная сила X_1 и момент X_2 . Поэтому достаточно составить два канонических уравнения

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1в} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2в} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

Коэффициенты канонических уравнений вычисляются обычным путем по эпюрам моментов (рис. 55, *в, г и д*). Криволинейную эпюру моментов по нижнему ригелю можно разделить на короткие участки и представить в виде ломаной эпюры. Тогда интеграл, выражающий перемещения, разбивается на несколько интегралов и полученные численные значения суммируются. Самое сложное здесь заключается в построении эпюры моментов на протяжении элемента, лежащего на упругом основании, т. е. нижнего ригеля. Последний может рассматриваться как балка на упругом основании с постоянным или переменным коэффициентом жесткости в зависимости от конкретных грунтовых условий. Нагрузка такой балки состоит из усилий, передаваемых в узлах крепления стоек к нижнему ригелю силами X_1 , X_2 и N_1 , а также силы N_2 , приложенной к самому ригелю. На рис. 55, *в, г и д* справа изображены расчетные схемы нижнего ригеля с соответствующими нагрузками.

При постоянном по длине нижнего ригеля коэффициенте жесткости для построения эпюр моментов можно воспользоваться готовыми формулами и табличными данными, имеющимися в книгах [24, 25], а также табл. 12—25. При переменном коэффициенте жесткости целесообразно использование разработанного нами метода расчета балок на упругом основании переменной жесткости [22] (табл. 5—10).

Вычисление коэффициентов канонических уравнений можно несколько упростить, если общую формулу перемещений представить в виде

$$\delta_{ih} = \sum \int \frac{M_i M_h ds}{EI} + \delta_i^{\Phi}. \quad (146)$$

Здесь интегралы относятся к стойкам и верхнему ригелю (надфундаментной конструкции) и выражают собой перемещение, которое получилось бы при абсолютном защемлении стоек в фундаменте. Член δ_i^{Φ} представляет собой перемещение, зависящее от деформации нижнего ригеля (фундамента). Определение δ_i^{Φ} производится на основании геометрических соображений по вычисленному заранее углам поворота и осадкам нижнего ригеля в местах примыкания к нему стоек рамы. В этом случае исключается интегрирование эпюр на протяжении элементов рамы, связанных с основанием.

При расчете рам по методу перемещений неизвестными являются угловые и линейные перемещения узлов системы. Стандартные элементы основной системы представляют собой однопролетные стержни, различным образом закрепленные по концам.

В случае сплошных фундаментов необходимо иметь готовые решения для реакций в условных дополнительных связях балки на упругом основании. Такие решения для постоянного и переменного коэффициента жесткости приведены в табл. 8—10, формулах 104—117.

Основная система рассмотренной рамы (рис. 55, а), у которой неизвестными в общем случае являются 4 угла поворота и 4 поступательных перемещения, показана на рис. 56, а. Эпюры моментов

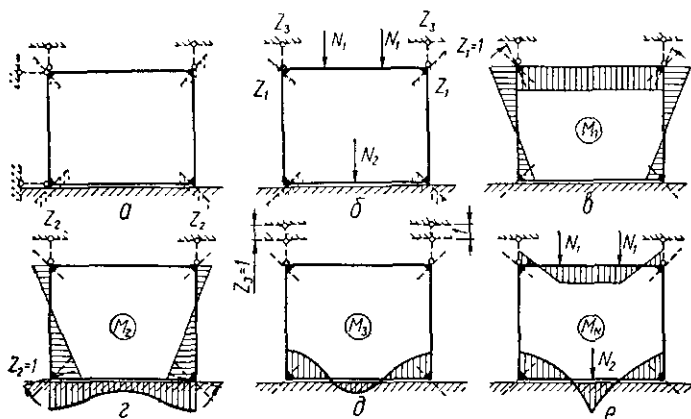


Рис. 56. К расчету рамы на сплошном фундаменте методом перемещений.

от угловых и поступательных перемещений с учетом симметрии изображены на рис. 56, в—е.

Канонические уравнения имеют обычный вид

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1в} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2в} &= 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3в} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Коэффициенты этой системы вычисляются таким же образом, как и при расчете обычных рам. После определения неизвестных Z_1 , Z_2 и Z_3 окончательная эпюра моментов строится по формуле

$$M = M_N + M_1Z_1 + M_2Z_2 + M_3Z_3. \quad (148)$$

Влияние податливости основания на напряженное состояние многоэтажных рам

Известные из литературы примеры расчета рам с учетом податливости основания касаются в основном простейших одноэтажных однопролетных П-образных рам. В связи с этим представляют ин-

терес оценки совместной работы рамных каркасов многоэтажных зданий с их основаниями.

Принятые для исследования расчетные схемы многоэтажных рам изображены на рис. 57 и 58. Схемы I и II (рис. 57) взяты из унифицированных габаритных схем многоэтажных производственных зданий по альбому ИИ20-1 «Указания по применению рабочих

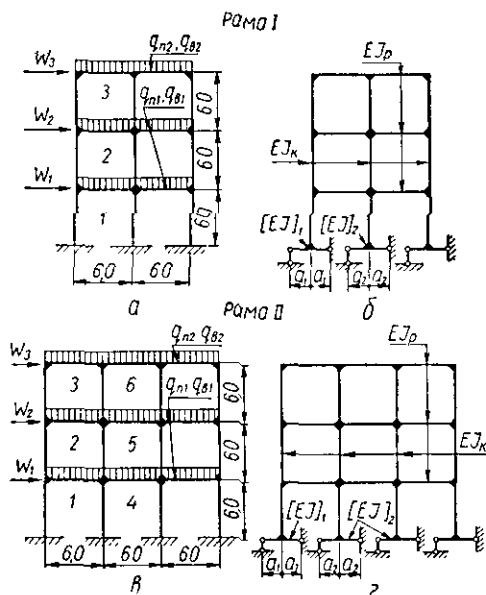


Рис. 57. Исследуемые схемы рам I и II с сеткой колонн каркаса здания 6×6 м: а, в — схемы нагружений рам с жесткими опорами, б, г — те же рамы на податливых опорах.

чертежей конструкций для зданий с сеткой колонн 6×6 м с перекрытиями типа 1 из плит, опирающихся на полки ригелей». Схема III заимствована из проекта здания, выполненного Киевским Промстройпроектом.

Подеречные рамы каркасов образуются из сборных железобетонных колонн и ригелей. Все узлы сопряжений являются жесткими. Схемы нагрузок на рамы дапы на рис. 57, а и 58, а. Постоянные нагрузки q_n состоят из собственного веса железобетонных конструкций междуэтажных перекрытий и покрытия с учетом заливки швов, собственного веса пола и перегородок на междуэтажных перекрытиях и собственного веса конструкции кровли. К временным нагрузкам относятся: ветровая W , снеговая $q_{с2}$ и эквивалентная равномерно распределенная нагрузка от веса оборудования $q_{в1}$.

Рамы рассчитаны при следующих исходных данных.

Схемы рам I и II. Нагрузки: постоянные $q_{п1} = 5,1$, $q_{п2} = 4,6$ т/м; временная на междуэтажных перекрытиях $q_{в1} = 10,8$ т/м; снеговая $q_{с2} = 1,26$ т/м; узловые ветровые $W_1 = 3,19$; $W_2 = 3,59$; $W_3 = 3,36$ т.

Жесткости элементов рамы: ригелей $EI_p = 40\,500$ тм², стоек (колонн) $EI_k = 5650$ тм² (модуль упругости бетона $E = 265\,000$ кг/см²).

Рассмотрены три варианта опорных закреплений: 1) абсолютно жесткая заделка или опирание на скальный грунт; 2) опирание фундаментов на плотный глинистый грунт и 3) опирание на водонасыщенный пылеватый песок.

Характеристика глинистого грунта:

Нормативное удельное сцепление грунта C^H . . . 0,42 кг/см²
 Угол внутреннего трения φ 30°
 Модуль деформаций E 350 кг/см²
 Нормативное давление на грунт для назначения
 предварительных размеров фундамента R^H . . . 4 »
 Объемный вес γ_0 1,9 т/м³

Характеристика песка:

Нормативное удельное сцепление грунта C^H . . . 0,04 кг/см²
 Угол внутреннего трения φ 30°
 Модуль деформаций E 100 кг/см²
 Нормативное давление на грунт для назначения
 предварительных размеров фундамента R^H . . . 1,5 »
 Объемный вес γ_0 1,7 т/м³

Глубина заложения фундаментов принята равной 2,0 м от планировочной отметки.

Вычисленные при указанных условиях параметры эквивалентных опорных балок имеют такие значения:

при глинистом грунте $a_1 = 0,63$, $a_2 = 0,90$ м, $[EI]_1 = 272$, $[EI]_2 = 1170$ тм².

при пылеватом песке $a_1 = 1,14$, $a_2 = 1,54$ м, $[EI]_1 = 797$, $[EI]_2 = 2610$ тм²;

Схема рамы III. Нагрузки: постоянные $q_{п1} = 0,83$; $q_{п2} = 1,47$ т/м; временные $q_{в1} = 3,6$, $q_{в2} = 0,3$ т/м; узловые ветровые $W_1 = 1,58$, $W_2 = 2,09$, $W_3 = 1,57$ т.

Жесткость ригелей крайних пролетов $E I_p = 29\,200$, крайних стоек $E I_{кк} = 7100$, средних стоек $E I_{кс} = 12\,850$ тм².

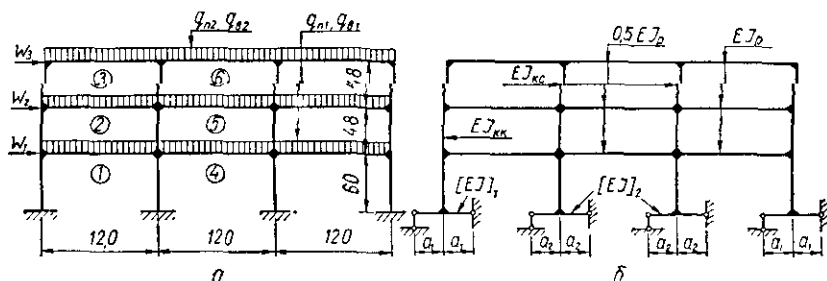


Рис. 58. Схема рамы III с сеткой колонн каркаса здания 6×12 м:
 а — схема нагружения рамы с жесткими опорами, б — та же рама на податливых опорах

Рассмотрены два варианта опорных закреплений: 1) абсолютно жесткая заделка (скальный грунт) и 2) опирание фундаментов на пылеватый насыщенный водой песок, характеризуемый теми же данными, что и для схем I и II.

Параметры эквивалентных опорных балок $a_1 = 1,11$, $a_2 = 1,58$ м, $[EI]_1 = 694$, $[EI]_2 = 2890$ тм².

В качестве примера приведем порядок вычисления исходных данных для фундаментов под крайние колонны рам I и II при песчаном грунте.

1. Нагрузку на фундамент принимаем по альбому ИИ20-1 «Указания по применению рабочих чертежей конструкций для зданий с сеткой колонн 6×6 м с перекрытиями типа 1 из плит, опирающихся на полки ригелей». Для рамы 2—6—3 (60) (стр. 43 альбома) $N = 104$ т, $M = 6,6$ тм.

2. Определяем размеры подошвы фундамента, который принимаем квадратным, симметричным относительно оси колонны. Техника подбора размеров подошвы центрально и внецентренно нагруженных фундаментов широко известна. Принятое значение стороны подошвы фундамента в нашем случае $a = 2,9$ м.

3. Вычисляем коэффициенты жесткости основания. Поскольку в пределах сжимаемой толщи грунт однородный, можно воспользоваться формулами (18) и (20). Для водонасыщенного песка $\mu = 0,2$. При квадратном фундаменте в соответствии с табл. 2 $\omega_z = 1,06$; $\omega_\phi = 1,98$. Модуль деформаций песка $E = 1000$ т/м². Подставляя приведенные значения исходных данных в формулы (18) и (20), получим

$$K_z = \frac{1,06 \cdot 1000}{2,9(1 - 0,2^2)} = 380 \text{ т/м}^3;$$

$$K_\phi = \frac{1,98 \cdot 1000}{2,9(1 - 0,2^2)} = 710 \text{ т/м}^3.$$

4. По формулам (137) и (138) находим длину и изгибающую жесткость опорной балки, моделирующей деформативность фундамента, опирающегося на песчаное основание

$$l = 2,9 \sqrt{\frac{710}{3 \cdot 380}} = 2,28 \text{ м},$$

$$[EI] = \frac{2,9^4 \cdot 2,28 \cdot 710}{12 \cdot 12} = 797 \text{ тм}^2.$$

Расчетные схемы рам с условными опорными балками изображены на рис. 57—58, б. Дальнейший расчет рам и построение эпюр моментов ничем не отличается от обычного расчета.

В расчетах принято, что основная часть осадок происходит после окончания монтажа каркасов.

Статические расчеты рам выполнены методом перемещений на вычислительной машине БЭСМ-2М. При этом была использована общая программа (ДО) расчета статически неопределимых стержневых систем методом перемещений, разработанная П. М. Сосином и Ж. М. Ременник [17].

Расчетные усилия в элементах рам определены из основного и дополнительного сочетания нагрузок. В основное сочетание входят постоянная, временная длительная и кратковременная

ветровая нагрузки. В дополнительное сочетание нагрузок входят: постоянная, временная длительная, кратковременные ветровая и снеговая. Кратковременные нагрузки введены в расчет с коэффициентом 0,9.

Таблица 38

Сравнение расчетных усилий в ригелях рамы I

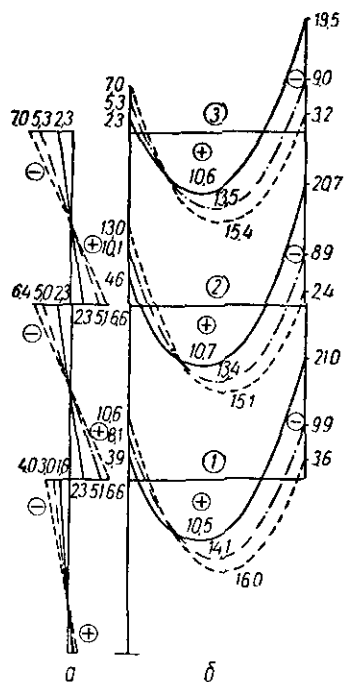
№ ригеля	Тип основания	№ строки	M, тм					Q, т	
			левый конец		пролет	правый конец		левый конец	правый конец
			-	+	+	-	+	+	+
1	Скала	1	29,1	13,1	47,1	75,9	—	46,3	61,2
	Глина	2	38,2	8,7	51,3	58,7	10,2	52,1	57,2
	Песок	3	44,3	5,4	54,9	47,0	21,0	55,1	54,5
	Разница между строками:								
	1—2	4	+31,2	-33,6	+ 8,9	-22,7	X	+12,5	- 6,1
2	1—3	5	+52,2	-58,8	+16,6	-38,1	X	+19,0	-10,9
	Скала	6	22,8	7,1	44,5	72,1	—	44,7	59,6
	Глина	7	36,2	—	48,9	51,7	5,7	51,0	54,4
	Песок	8	43,0	—	52,7	40,6	16,9	54,2	51,7
	Разница между строками:								
3	6—7	9	+58,7	X	+ 9,8	-28,3	X	+14,1	- 8,7
	6—8	10	+88,5	X	+18,4	-43,7	X	+21,2	-13,3
	Скала	11	6,7	1,3	14,8	25,7	—	14,5	21,4
	Глина	12	14,3	—	22,5	11,6	8,6	20,7	18,5
	Песок	13	18,2	—	30,5	7,5	22,4	23,3	17,6
	Разница между строками:								
3	11—12	14	+113,4	X	+52,0	-54,8	X	+42,8	-13,6
	11—13	15	+171,6	X	+106,0	-70,8	X	+60,7	-17,8

В качестве примера в табл. 38 приведены значения расчетных усилий в ригелях, полученные при различных условиях опирания фундаментов рамы I. В этой же таблице произведено сопоставление величин усилий, и разница между ними выражена в процентах. За 100% приняты данные расчета рамы, опирающейся на скальный грунт, т. е. имеющей абсолютно жесткие опоры. Знак X означает, что усилия в данном сечении при неподвижных и податливых опорах имеют разные знаки.

Рассмотрим полученные результаты по каждой раме в отдельности.

Рама I (см. рис. 57). На рис. 59 приведены эпюры моментов, построенные по результатам расчета рамы на действие постоянной нагрузки. Вследствие симметрии на рисунке показана лишь одна половина рамы; в средних колоннах моменты равны нулю.

По эпюрам легко видеть, какое влияние оказывает податливость основания на величины из-

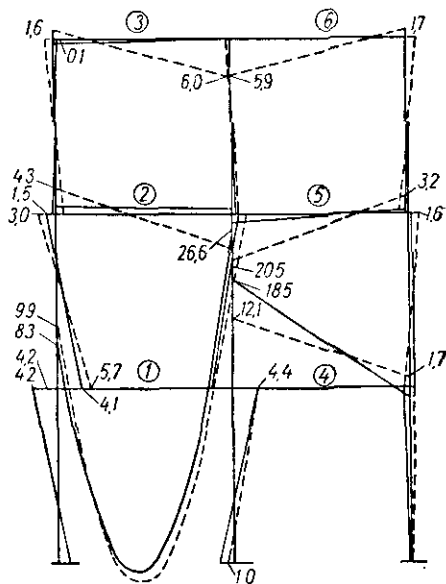


Условные обозначения

- при опирании на скалы (абсолютно жесткие опоры)
- - - при опирании на глину
- · - · при опирании на пылеватый песок

Рис. 59. Эпюры моментов в раме I от постоянной нагрузки:

а — моменты в крайних колоннах;
б — моменты в ригелях.



Условные обозначения

- при опирании на скалы
- - - при опирании на пылеватый песок

Рис. 60. Эпюры моментов в раме I от временной нагрузки на ригеле 1.

гибающих моментов в элементах рамы. Так, например, с увеличением податливости опор моменты в крайних стойках, начиная с узла первого этажа и выше, возрастают в 2 раза и более. При этом опорные моменты остаются практически без изменений. В ригелях происходит перераспределение усилий, которое характеризуется значительным уменьшением моментов на правых концах ригелей (в 2—6 раз) и увеличением моментов на левых концах и в пролете (в 1,5—2,5 раза).

Эпюры изгибающих моментов при загрузке ригеля 1 временной равномерно распределенной нагрузкой представлены на

рис. 60. Здесь нанесены эпюры, взятые из расчета рамы при опирании на скальное и песчаное основания; при опирании на глинистый грунт эпюры занимают промежуточное положение между указанными двумя крайними видами оснований. Из рис. 60 можно видеть, что увеличение податливости основания существенно не изменяет изгибающих моментов в загруженном ригеле и примыкающих к нему узлах стоек. В остальных же ригелях и стойках происходит резкое перераспределение моментов, причем во многих элементах нарушается общий характер распределения моментов (ригели 2, 3, 4, 6 и крайние правые колонны).

Действие ветровой нагрузки отражено на рис. 61. Здесь также построены эпюры моментов только при скальном и песчаном основаниях. Интересно отметить, что в данном случае податливость основания ска-

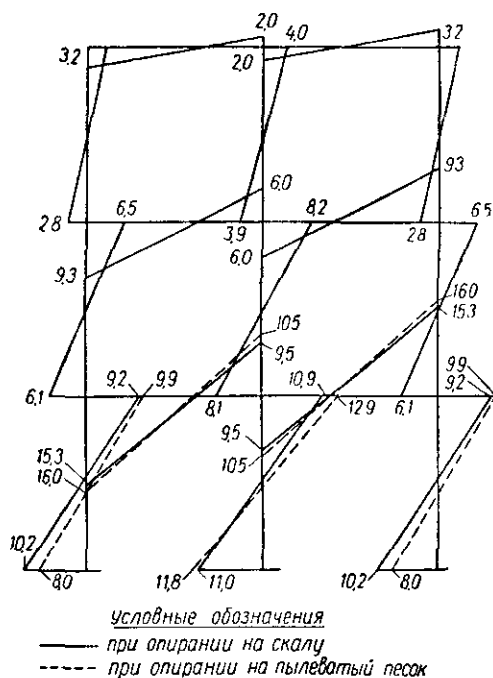


Рис. 61. Эпюры моментов в раме I от ветровой нагрузки.

зывается лишь на элементах первого этажа рамы. Усилия, возникающие от ветровой нагрузки в элементах второго и третьего этажа рамы, практически не зависят от степени податливости ее опор. Такая же картина распределения моментов от ветровой нагрузки наблюдается и в рамах II и III.

Представленные на рис. 59—61 эпюры изгибающих моментов от отдельных характерных видов нагрузок многоэтажных рам наглядно иллюстрируют влияние податливости основания на распределение и величины усилий в двухпролетной трехэтажной раме. Однако как бы ни сказывалась податливость основания при действии отдельных видов нагрузок, в конечном счете подбор сечений элементов рамы производится по расчетным усилиям, получаемым из различных невыгодных сочетаний постоянной и временных нагрузок. Поэтому нельзя ограничиваться рассмотрением только одного-двух видов нагрузок, а следует сопоставить результаты расчетов от суммарного воздействия нагрузок. Такое сопостав-

ление для рамы I проделано в табл. 38, где приведены величины расчетных значений изгибающих моментов M и поперечных сил Q в ригелях рамы.

Из табл. 38 видно, что с увеличением податливости основания происходит следующее.

1. Величины отрицательных расчетных изгибающих моментов на левых концах ригелей 1, 2 и 3 (имеется в виду левая половина рамы) увеличиваются от 52,2% в ригеле 1 до 171,6% в ригеле 3, т. е. на вышерасположенных ригелях наблюдается относительный рост моментов по сравнению с нижними. Положительные расчетные моменты, возникающие только на ригеле 1, уменьшаются до 58,8%. На ригелях 2 и 3 положительные моменты при податливых опорах не возникают.

2. Наибольшие расчетные пролетные моменты повышаются с 16,6% в ригеле 1 до 106,0% в ригеле 3.

3. Отрицательные моменты на правых концах уменьшаются на 22,7—38,1% в ригеле 1, на 28,3—43,7% в ригеле 2 и на 54,8—70,8% в ригеле 3. При податливых опорах возникают также значительные положительные моменты, которые отсутствуют при неподвижных опорах.

4. Перераспределение поперечных сил характеризуется их увеличением на левых концах ригелей и уменьшением на правых, соответственно перераспределению изгибающих моментов.

Не приводя расчетных сочетаний значений изгибающих моментов M и нормальных сил N в стойках рамы I, отметим общий характер перераспределения усилий в стойках рамы, вызываемый увеличением податливости основания. Усилия в крайних стойках изменяются значительно больше, чем в средней стойке, причем эти изменения для одних сочетаний расчетных усилий направлены в сторону увеличения, для других — в сторону уменьшения. Опорные моменты крайних стоек уменьшаются, а опорные моменты средней стойки почти не изменяются.

Рама II (см. рис. 57). В ригелях крайних пролетов рамы II наблюдается такой же характер перераспределения усилий, что и в раме I: на левых концах ригелей и в пролете моменты увеличиваются, а на правых концах — уменьшаются. В ригелях первого и второго этажей среднего пролета опорные моменты снижаются при одновременном значительном (до полутора раз) увеличении пролетных моментов. В ригеле 6 третьего этажа резко увеличиваются как пролетные, так и опорные моменты. Изменение величин поперечных сил относительно небольшое.

Что касается стоек, то увеличение податливости основания, примерно, в одинаковой мере сказывается на крайних и средних стойках, вызывая в последних существенные изменения M и N .

Рама III (см. рис. 58). Податливость основания сказывается на изменении изгибающих моментов и поперечных сил в ригелях рамы III в значительно меньшей степени, чем в однотипной раме II.

Подобное явление имеет место и в стойках рамы III. Объясняется это обстоятельство тем, что размеры пролетов рамы III вдвое больше пролетов рамы II, вследствие чего рама III является более гибкой по сравнению с рамой II.

Необходимо отметить, что приведенные данные статических расчетов относятся к случаю, когда рама с нагрузками как бы сразу устанавливается на упругое основание. В действительности картина напряженного состояния рамы может в известных пределах меняться, если учесть, что часть осадок происходит в процессе монтажа каркаса, часть постоянных нагрузок прикладывается до замоноличивания каркаса, и модуль деформаций грунта при расчете рамы на временные нагрузки можно принимать повышенным вследствие уплотнения грунта.

Все же, как правило, учет деформации основания при расчете рам рассмотренных типов приводит к определенному перераспределению арматуры в их элементах по сравнению с традиционным расчетом, и пренебрежение влиянием податливости основания при расчете рамы может привести в некоторых случаях к существенным ошибкам в сторону занижения величин расчетных усилий в отдельных элементах, что в целом снижает надежность сооружения и его эксплуатационные качества

БАЛКИ-СТЕНКИ

Общие сведения

В главе II были рассмотрены вопросы расчета обычных балок на упругом основании. Если отношение высоты балки H к ее длине L превышает 0,5, то подобные балки следует рассчитывать на основе решений плоской задачи теории упругости для прямоугольного контура. Законы распределения напряжений при изгибе различны для балок, имеющих малую высоту, и балок-стенок, высота которых одного порядка с длиной. В балке с отношением сторон $H : L > 1$ отклонения от закона плоских сечений могут достигать значительных величин, причем нейтральная ось может быть значительно смещена к одной из сторон или даже могут возникать несколько нейтральных осей.

К расчетной схеме балки-стенки на упругом основании могут быть сведены многие строительные конструкции, поэтому определение напряженного состояния балок-стенок представляет практический интерес. Так, например, в качестве балок-стенок можно рассматривать высокие стены кирпичных и крупнопанельных жилых, гражданских и производственных зданий, а также многие гидротехнические сооружения.

С расчетной точки зрения балка-стенка представляет собой плоский диск (пластинку) с относительно малой толщиной. Нагрузка прилагается в плоскости этого диска. По оси, перпендикулярной плоскости диска, напряжения отсутствуют, хотя деформации в этом направлении возможны.

Расчет балок-стенок сводится к отысканию функции напряжений $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей внутри области, ограниченной контуром балки-стенки, известному бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (149)$$

и обладающей на границе этой области заданными значениями.

Компоненты напряжений определяются простым дифференцированием функции напряжений по формулам

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (150)$$

В литературе имеются решения многих задач, относящихся к расчету шарнирно опертых, защемленных и консольных балок-стенок. Однако вопросы расчета балок-стенок, опирающихся на сплошное упругое основание, еще недостаточно разработаны. Количество решенных задач этого типа пока невелико.

Первой работой, посвященной расчету балок-стенок на упругом основании, является исследование Ю. Н. Тихенко [42]. В этой работе принята винклерова модель упругого основания с постоянным коэффициентом постели. Решение уравнения (149) принято в виде рядов

$$\varphi = \Phi(x) \psi(y),$$

где $\Phi(x)$ принимается в виде тригонометрических функций, а $\psi(y)$ подбирается из условия удовлетворения бигармоническому уравнению (149). Решение получилось весьма громоздкое и практического применения не нашло.

В работе В. В. Михеева [32] рассмотрена сплошная балка-стенка на упругом основании, находящаяся под действием собственного веса. В качестве модели основания принято упругое изотропное, однородное полупространство. Решение выполнено в степенных рядах с использованием готовых формул контакта между балкой и основанием, полученных ранее М. И. Горбуновым-Посадовым.

Модель основания в виде упругого изотропного полупространства принята также в работе А. К. Морозовой [33], которая рассмотрела ту же задачу, что В. В. Михеев. У А. К. Морозовой для упрощения расчета принято, что в продольном направлении напряжения в грунте под балкой-стенкой распределяются по параболическому симметричному закону. Равномерно распределенная нагрузка на балку-стенку считается приложенной к ее нижнему краю. Напряжения для такой расчетной схемы найдены в замкнутой форме вариационным методом Кастильяно-Ритца.

Если пользоваться решениями В. В. Михеева и А. К. Морозовой, то, например, при равномерно распределенной нагрузке всегда получится прогиб балки-стенки выпуклостью вниз, что обусловлено моделью основания в виде упругого полупространства. Вместе с тем, как показывает практика, наблюдаются самые разнообразные деформации стенок зданий и сооружений: изгиб выпуклостью вверх, перегиб и др. Следовательно, эти решения применимы лишь в некоторых частных случаях.

Из зарубежных работ, касающихся вопроса расчета балок-стенок на упругом основании, можно отметить работу Ф. Андермана [48], где рассматриваются балки-стенки, подверженные влиянию горных выработок. Предполагается, что реактивные давления основания известны и распределяются по закону пара-

балы второй степени симметрично относительно середины балки-стенки. Интегрирование бигармонического уравнения (149) выполнено методом конечных разностей. Работа носит прикладной характер и может быть полезна при расчете балок-стенок, находящихся под действием симметричной самоуравновешенной нагрузки, приложенной к нижнему краю.

В настоящей главе рассматриваются вопросы расчета балок-стенок, опирающихся на упругое винклерово основание переменной жесткости. Учитывая общий приближенный характер расчета конструкций на грунтовом основании, решения разбиты на два отдельных этапа: вначале определяются значения реактивных давлений основания, а затем от известной внешней нагрузки и найденных реакций основания вычисляются напряжения в сечениях балки-стенки.

Определение реакций основания

Решение задачи по определению реактивных давлений основания под балкой-стенкой можно построить подобно решению для простой балки [22]. Приравнявая вертикальные перемещения отдельных точек нижнего края балки-стенки осадкам поверхности основания в этих же точках, можно составить любое число уравнений совместности деформаций, которые вместе с двумя уравнениями равновесия дадут решение поставленной задачи. Однако в случае балки-стенки выражения для прогибов, фигурирующие в уравнениях совместности, чрезвычайно усложнятся по сравнению с выражениями прогибов простой балки.

Действительно, формула для определения вертикального перемещения какой-либо точки i на нижнем краю балки-стенки имеет вид [7]

$$v_i = \frac{1}{E} \left[\int_{x_i}^x \int_{x_i}^x \frac{\partial (\sigma_x - \mu \sigma_y)}{\partial y} dx dx + Ax + B \right], \quad (151)$$

где A и B — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий. Из приведенного выражения видно, что для определения перемещений v_i необходимо знать напряжения σ_x и σ_y в балке-стенке, но эти напряжения, в свою очередь, зависят от перемещений поверхности основания.

Между тем нет необходимости усложнять решение этой задачи, если обратить внимание на следующее обстоятельство. Выше указывалось, что расчет балок-стенок по элементарным формулам сопротивления материалов не может гарантировать ни достаточной прочности, ни правильного конструирования, и расчет балок-стенок необходимо вести по методам теории упругости. Это положение

бесспорно, когда речь идет об определении напряжений. Что же касается определения перемещений балок-стенок, то здесь с достаточной для практических целей точностью можно воспользоваться формулами определения прогибов обычных балок, но с обязательным учетом перемещений от поперечных сил.

Для обоснования последнего предложения сопоставим прогибы балок-стенок, вычисленные по методам теории упругости и на основании известной формулы перемещений плоской стержневой системы

$$\Delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k ds}{EI} + \sum \int \frac{v Q_i Q_k ds}{GF}. \quad (152)$$

Рассмотрим несколько характерных примеров.

1. Определим прогиб (вертикальное перемещение) середины нижнего края, т. е. точки i (рис. 62, а), в квадратной балке-стенке, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, приложенной по верхнему краю. Решение методами теории упругости даст значение вертикального перемещения i , равное [7, стр. 28]

$$v_i = 0,495 \frac{qL}{E}. \quad (153)$$

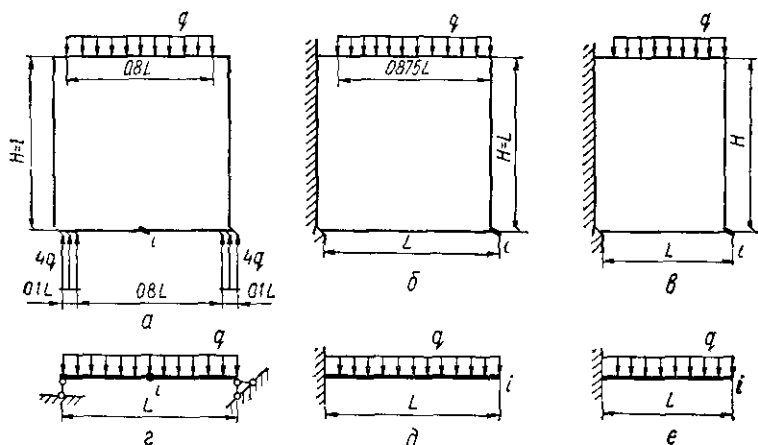


Рис. 62. Схемы балок-стенок:

а, б, в — расчетные схемы балок-стенок для определения перемещений по методам теории упругости, г, д, е — то же по элементарным формулам сопротивления материалов.

Прогиб середины балки, изображенной на рис. 62, г, с учетом влияния поперечных сил вычисляется по формуле

$$f_i = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{vqL^2}{8GF}, \quad (154)$$

где v — коэффициент формы, равный для прямоугольника 1,2.

Момент инерции сечения балки $I = \frac{1 \cdot H^3}{12} = \frac{L^3}{12}$.

Площадь сечения $F = 1 \cdot H = L$.

Модуль сдвига при коэффициенте Пуассона $\mu = 0,3$, принятом в работе [7], $G = \frac{E}{2(1+\mu)} = 0,385 E$.

Подставляя значения приведенных исходных данных в формулу (154), получим

$$f_i = (0,156 + 0,389) \frac{qL}{E} = 0,545 \frac{qL}{E}. \quad (155)$$

Таким образом, прогиб точки i , вычисленный по элементарной формуле (154), отличается от строгого решения (153) всего на 10 %. В то же время нормальные напряжения σ_x в этой же точке отличаются друг от друга почти в 2 раза.

2. Прогиб точки i консольной квадратной балки-стенки (рис. 62, б), полученный при помощи решения по методу сеток и перемещений, равен [8]

$$v_i = 3,12 \frac{qL}{E}. \quad (156)$$

Здесь коэффициент Пуассона принимался равным $\frac{1}{6}$.

Прогиб конца консольной балки, показанной на рис. 62, в, на основании (152) выражается формулой

$$f_i = \frac{qL^4}{8EI} + \frac{vqL^2}{2GF}. \quad (157)$$

При

$$I = \frac{L^3}{12}, \quad F = L, \quad G = \frac{E}{2\left(1 + \frac{1}{6}\right)} = 0,428E, \quad v = 1,2$$

имеем

$$f_i = (1,5 + 1,4) \frac{qL}{E} = 2,9 \frac{qL}{E}. \quad (158)$$

Разница между точным и приближенным решениями составляет 7 %.

3. Прогибы консольной балки стены с отношением сторон $H : L = 1 : 0,75$ (рис. 62, в), вычисленные точным [8] и приближенным методами, соответственно равны

$$v_i = 1,75 \frac{qL}{E}, \quad (159)$$

$$f_i = 1,68 \frac{qL}{E}. \quad (160)$$

Разница между прогибами — 3,8 %.

Следовательно, вертикальные перемещения балок-стенок с достаточной для практики точностью определяются по элементарным формулам прогибов балок с учетом влияния поперечных сил. Значит для нахождения значений реактивных давлений основания в случае балок-стенок полностью применимы решения, полученные для обычных балок на упругом основании с учетом влияния поперечных сил ([22] и глава II).

Порядок определения реакций основания такой.

Делим нижний край балки-стенки на ряд равных по длине участков. Выбор числа участков зависит от требуемой точности расчета и характера эпюры коэффициентов жесткости основания. При расчете балки-стенки методом сеток количество участков обычно принимается равным густоте сетки в горизонтальном направлении (4, 6, 8 и т. д.).

Пользуясь готовой матрицей коэффициентов системы расчетных уравнений, приведенной в табл. 5, выбираем нужное количество уравнений и вычисляем значения коэффициентов при неизвестных погонных интенсивностях реакций основания. Свободные члены вычисляем по готовым формулам в зависимости от вида внешней нагрузки (формулы 51—53).

Решаем систему уравнений относительно реакций основания p .

При расчете сплошных монолитных балок-стенок, в целях получения упрощенного решения, для определения реакций основания можно положить $EI = \infty$ и $GF = \infty$. Тогда, согласно [22], значения погонных интенсивностей реакций основания в точках 0 и 1 (рис. 63) находим из решения двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_{10}p_0 + A_{11}p_1 &= -\frac{2}{a} \sum Y_{\text{в}}; \\ A_{20}p_0 + A_{21}p_1 &= -\frac{6}{a^2} \sum M_{0\text{в}}, \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

где $\sum Y_{\text{в}}$ — сумма проекций всех внешних сил на вертикальную ось, считая положительным направление оси вверх;
 $\sum M_{0\text{в}}$ — сумма моментов от внешних нагрузок относительно точки 0, считая положительным направление вращения по часовой стрелке.

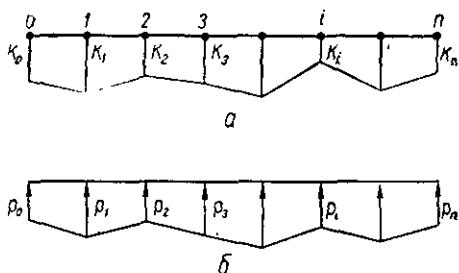


Рис. 63. Эпюры коэффициентов жесткости и реакций основания для балки-стенки:
 а — коэффициент жесткости; б — реактивное давление.

Коэффициенты при неизвестных вычисляются по таким формулам

$$\left. \begin{aligned} A_{10} &= 1 - \frac{1}{K_0} \left[2 \sum_{i=2}^{n-1} (i-1) K_i - (n-1) K_n \right]; \\ A_{11} &= \frac{1}{K_1} \left[2 \sum_{i=1}^{n-1} i K_i + n K_n \right]; \\ A_{20} &= 1 - \frac{1}{K_0} \left[6 \sum_{i=2}^{n-1} i(i-1) K_i - (3n-1)(n-1) K_n \right]; \\ A_{21} &= \frac{1}{K_1} \left[6 \sum_{i=1}^{n-1} i^2 K_i + (3n-1) n K_n \right]. \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

Остальные значения реакций основания определяются по формуле

$$p_i = K_i \left[i \frac{p_1}{K_1} - (i-1) \frac{p_0}{K_0} \right] \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (163)$$

Определение напряжений в балке-стенке

Наиболее простым методом определения напряжений в балке-стенке при известных внешних нагрузках и реакциях основания является метод конечных разностей. Хотя при пользовании указанным методом требуется составлять и решать системы линейных уравнений иногда с весьма большим числом неизвестных, но при современном развитии вычислительной техники это уже не является проблемой. Решение многих практически важных задач существенно облегчается, благодаря имеющимся в литературе и приведенным в настоящей книге таблицам чисел влияния и значений напряжений в узлах сетки.

Подробное изложение вопросов расчета балок-стенок методом конечных разностей имеется во многих учебниках по теории упругости и отдельных монографиях [6, 15, 16]. Поэтому ниже рассматриваются лишь вопросы, непосредственно связанные с расчетом балок-стенок на упругом основании.

В результате замены производных дифференциального уравнения (149) отношениями конечных разностей получаем для каждого внутреннего узла сетки, расположенного на расстоянии более двух шагов от контура (рис. 64, а), уравнения такого вида:

$$\varphi_0 (6\alpha^2 + 8\alpha + 6) - 4(\varphi_1 + \alpha\varphi_2 + \varphi_3 + \alpha\varphi_4)(\alpha + 1) + 2(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8)\alpha + (\varphi_9 + \alpha^2\varphi_{10} + \varphi_{11} + \alpha^2\varphi_{12}) = 0, \quad (164)$$

где $\alpha = \frac{b^2}{a^2}$.

В случае квадратной сетки $\alpha = 1$ и уравнение (164) упрощается

$$20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8) + (\varphi_9 + \varphi_{10} + \varphi_{11} + \varphi_{12}) = 0. \quad (165)$$

В уравнения для точек, расположенных на расстоянии двух шагов от контура (рис. 64, б) входят наряду с неизвестными зна-

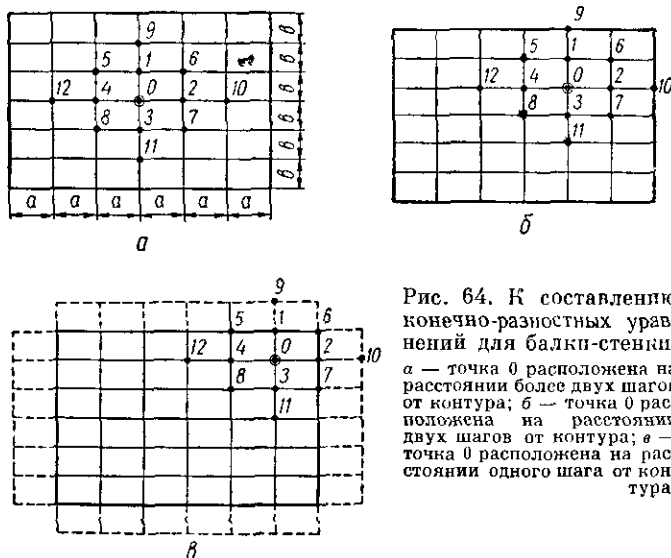


Рис. 64. К составлению конечно-разностных уравнений для балки-стенки: а — точка 0 расположена на расстоянии более двух шагов от контура; б — точка 0 расположена на расстоянии двух шагов от контура; в — точка 0 расположена на расстоянии одного шага от контура.

чениями φ во внутренних точках также и известные значения φ в точках контура. А в уравнения для точек, находящихся на расстоянии одного шага от контура (рис. 64, в), должны быть включены значения φ первого ряда законтурных точек. Последние определяются по формулам:

а) для края, параллельного оси x ,

$$\varphi_9 = \varphi_0 + 2b \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad (166)$$

б) для края, параллельного оси y ,

$$\varphi_{10} = \varphi_0 + 2a \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (167)$$

Здесь $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ представляют собой нормальные производные в точках 1 и 2 функции напряжений, определяемые по заданным на контуре усилиям с помощью рамной аналогии [6].

Таким образом, неизвестными являются лишь значения φ во внутренних узлах сетки. Свободными членами в уравнениях

будут известные значения функции напряжений и ее нормальной производной на контуре. Свободные члены уравнений для узлов, расположенных далее чем на 2 шага от контура, равны нулю.

Напряжения в точке 0:

$$\sigma_x = \frac{\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3}{b^2}; \quad (168)$$

$$\sigma_y = \frac{\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4}{a^2}; \quad (169)$$

$$\tau_{xy} = \frac{(\varphi_5 + \varphi_7) - (\varphi_6 + \varphi_8)}{4ab}. \quad (170)$$

Метод конечных разностей может быть применен при любых видах загрузки балки-стенки.

В практике проектирования для расчета балок-стенок на упругом основании целесообразно пользоваться готовыми решениями систем уравнений в числах влияния. Имея числа влияния, зависящие только от размеров балки-стенки и структуры сетки, и вычислив свободные члены уравнений, зависящие от нагрузок, можно найти простым суммированием произведений чисел влияния на соответствующие свободные члены значения функции напряжений в узлах сетки.

Такого рода справочный материал с примерами расчета имеется в книге [6], где рассмотрены балки-стенки с отношением сторон $H : L = 0,25; 0,5; 0,75$ и $1,00$ при шаге сетки, равном $\frac{1}{6}$ пролета.

Ниже приводятся некоторые решения для балок-стенок, лежащих на упругом основании с переменным коэффициентом жесткости. К расчету таких балок-стенок обычно сводится расчет коробки бескаркасного здания на неравномерные осадки основания. В качестве расчетной принимается симметричная схема неоднородного основания, по которой изменчивость коэффициента жесткости по длине стены выражается линейным или параболическим законом. Нами принята линейная эпюра коэффициента жесткости по

Рис. 65. Расчетные эпюры жесткости и реакций основания для балки-стенки:

a — эпюра коэффициентов жесткости основания; b — эпюра реактивных давлений.

рис. 65, a с отношением $\frac{K_{\max}}{K_{\min}} = 2$. Для такого случая при равномерно распределенной внешней нагрузке нами [22] получены следующие формулы реакций основания:

$$P_k = q \frac{12 + 0,35m + \nu n}{6(\alpha + 1) + 0,35m + \nu n}; \quad (171)$$

$$p_c = 2q - p_k, \quad (172)$$

$$\text{где } m = \frac{K_c L^4}{EI}; \quad n = \frac{K_c L^2}{GF}; \quad \alpha = \frac{K_c}{K_k}.$$

При обычных размерах стен зданий и характеристиках грунта значения реакций основания получаются примерно равными

$$p_k = \frac{2}{3} q, \quad p_c = \frac{4}{3} q.$$

На рис. 66 показаны эпюры нормальных напряжений в вертикальных средних сечениях балок-стенок при соотношении ст.

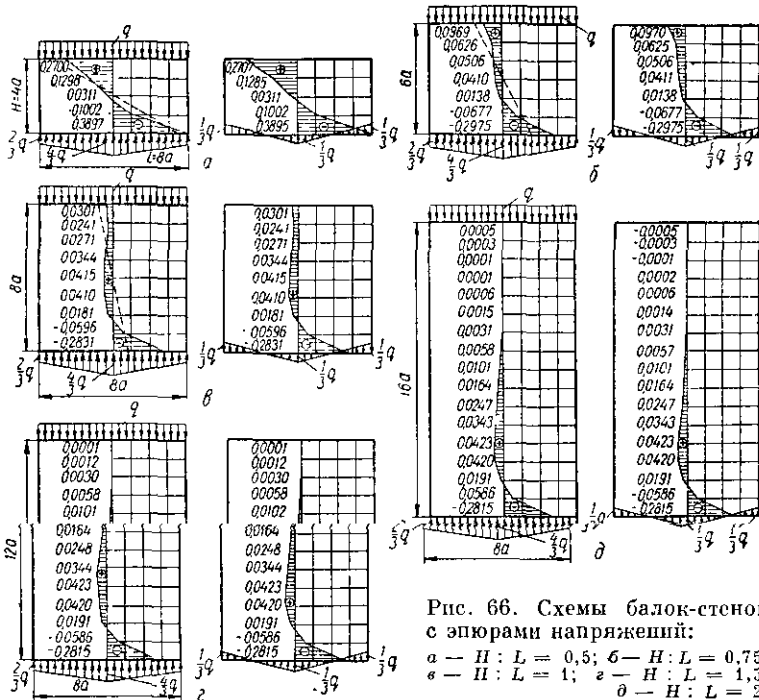


Рис. 66. Схемы балок-стенок с эпюрами напряжений:

а — $H : L = 0,5$; б — $H : L = 0,75$;
в — $H : L = 1$; г — $H : L = 1,5$;
д — $H : L = 2$.

рон $H : L = 0,5; 0,75; 1,0; 1,5; 2,0$; множитель для напряжений q . Слева на каждом рисунке даны эпюры при расположении внешней равномерно распределенной нагрузки q на верхнем крае балки-стенки; справа — на нижнем, где показана суммарная самоуравновешенная нагрузка (внешняя нагрузка плюс реактивные давления). Указанные балки-стенки рассчитаны нами методом конечных разностей с шагом квадратной сетки, равном $\frac{1}{8}$ пролета. Благодаря сравнительно малому шагу сетки, приведенные значения

напряжений отличаются высокой точностью. На рис. 66 для сравнения пунктиром нанесены также эпюры напряжений, рассчитанные по элементарной теории изгиба балок.

Из этих решений можно сделать следующие выводы.

1. Распределение напряжений в вертикальном среднем сечении, по которому, как правило, и рассчитываются балки-стенки, при отношении сторон $H : L = 0,5$ мало отличается от прямолинейного, даваемого элементарной теорией изгиба. Поэтому балки-стенки с отношением сторон $H : L \leq 0,5$ можно рассчитывать как обычные балки, пользуясь для определения краевых напряжений известной формулой

$$\sigma_x = \frac{M}{W}.$$

2. В балках-стенках с отношением сторон $H : L > 1$ распределение напряжений в нижней части вертикального среднего сечения почти совпадает с таковым квадратной балки-стенки ($H : L = 1$). В то же время напряжения в верхней части сечения практически можно считать нулевыми. Это значит, что для расчета балок-стенок с $H : L > 1$ могут быть использованы решения, полученные для квадратной балки-стенки.

3. Значения напряжений σ_x , полученные при расположении нагрузки по верхнему краю балки-стенки, в точности совпадают со значениями этих напряжений для случая нагрузки по нижнему краю (имеющиеся в отдельных точках расхождения в четвертом знаке объясняются округлениями при вычислениях). То же относится и к касательным напряжениям τ_{xy} . Различие имеется только между вертикальными нормальными напряжениями σ_y . Следовательно, когда расчетными являются напряжения σ_x и τ_{xy} , всю внешнюю нагрузку можно считать приложенной к нижнему краю балки-стенки. Эта нагрузка совместно с реактивными давлениями основания приводится к самоуравновешенной нагрузке, действующей по нижнему краю балки-стенки. В этом случае напряжения σ_y вычисляются приближенно из рассмотрения условий равновесия по горизонтальным сечениям.

Отметим, что сделанные выводы относятся к случаям, когда внешняя нагрузка и реактивные давления распределены по длине балки-стенки непрерывно без резких скачков.

Случай симметричной самоуравновешенной нагрузки

Случай симметричной самоуравновешенной нагрузки имеет важное практическое значение, так как к нему могут быть сведены многие задачи расчета балок-стенок на упругом основании. Для такого случая при $H : L = 0,5$ и 1 имеются решения, позволяющие легко вычислять любые напряжения в любой точке балки-стенки при произвольной самоуравновешенной симметричной

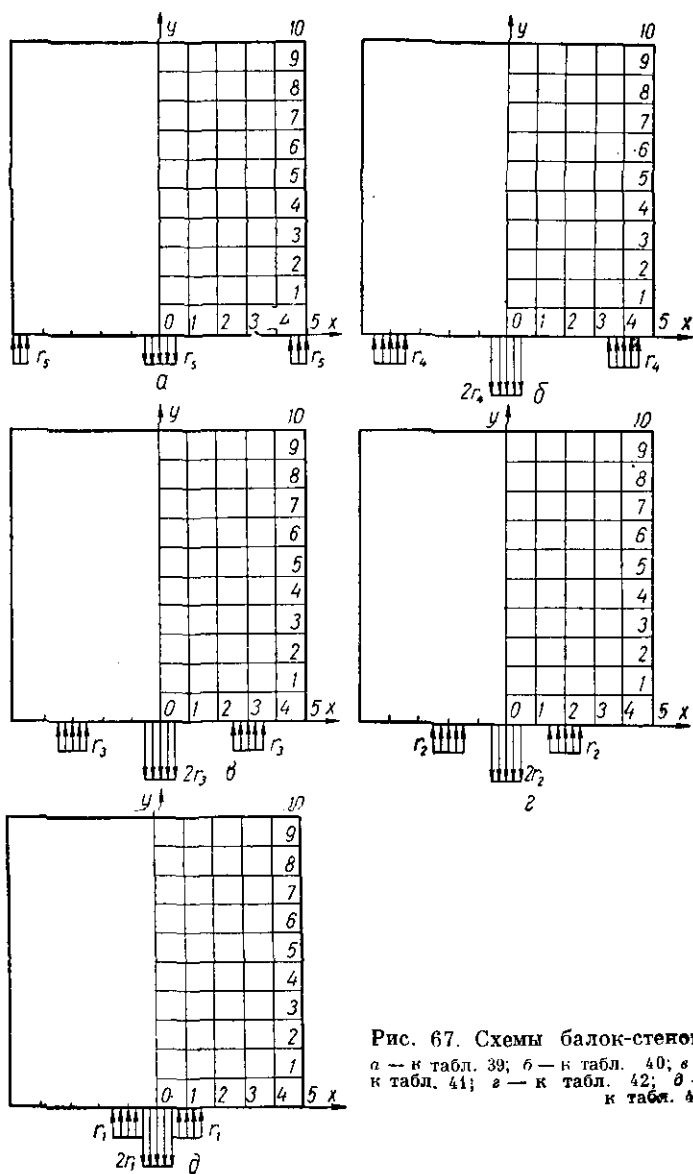


Рис. 67. Схемы балок-стенок:
 а — к табл. 39; б — к табл. 40; в —
 к табл. 41; г — к табл. 42; д —
 к табл. 48.

нагрузке по нижнему краю [48]. Эти решения основаны на том, что напряженное состояние балки-стенки от заданной самоуравновешенной, симметричной относительно оси y , нагрузки может быть получено путем алгебраического суммирования напряжений от отдельных видов нагрузок, показанных на рис. 67.

В табл. 39—43 приводятся значения напряжений для основного расчетного случая — квадратной балки-стенки. Напряжения вычислены методом конечных разностей при шаге сетки $a = 0,1L$.

Чтобы использовать таблицы при любой симметричной нагрузке, следует заменить действительную нагрузку по нижнему краю эквивалентной ей нагрузкой, состоящей из совокупности сосредоточенных сил R , приложенных в узловых точках 0, 1, 2, 3, 4, 5 на оси x (рис. 68, в). Под эквивалентной подразумевается нагрузка, вызывающая в указанных узловых точках те же изгибающие моменты, которые вызывает та же действительная нагрузка (рис. 68, б). При этом контур балки-стенки рассматривается как статически определимая рама (рис. 68, а). Изгибающий момент считается положительным, если растянутые волокна получаются на внешней стороне рамы.

Для определения сил R составляем ряд уравнений вида $M_{iR} = M_{iq}$:

$$\left. \begin{aligned} R_5 a &= M_4; \\ R_5 2a + R_4 a &= M_3; \\ R_5 3a + R_4 2a + R_3 a &= M_2; \\ R_5 4a + R_4 3a + R_3 2a + R_2 a &= M_1; \\ R_5 5a + R_4 4a + R_3 3a + R_2 2a + R_1 a &= M_0 \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

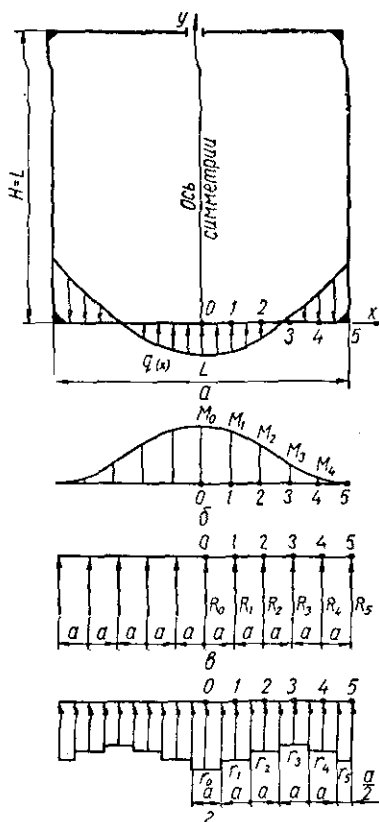


Рис. 68. К определению эквивалентных нагрузок:

a — фактическая нагрузка на контурной раме; b — эпюра изгибающих моментов от фактической нагрузки; $в$ — эквивалентная нагрузка в виде сосредоточенных сил; $г$ — эквивалентная нагрузка в виде равномерно распределенных нагрузок.

Таблица 39

Балка-стенка с отношением сторон 1:1 под действием нагрузок, приложенных в узлах $(x, y) = (0,0)$ и $(5,0)$; множитель для напряжений r_6 (см. рис. 67, а)

y	x					
	0	1	2	3	4	5

Напряжения σ_x

0	0,722	0,310	0,230	0,250	0,265	0
1	0,101	0,188	0,139	0,068	-0,015	0
2	-0,024	0,034	0,030	-0,003	-0,034	0
3	-0,066	-0,042	-0,030	-0,031	-0,025	0
4	-0,078	-0,066	-0,005	-0,036	-0,018	0
5	-0,074	-0,067	-0,052	-0,033	-0,012	0
6	-0,063	-0,058	-0,045	-0,027	-0,010	0
7	-0,051	-0,047	-0,036	-0,022	-0,007	0
8	-0,042	-0,039	-0,030	-0,018	-0,006	0
9	-0,040	-0,036	-0,028	-0,015	-0,006	0
10	-0,049	-0,043	-0,029	-0,012	-0,001	0

Напряжения σ_y

0	1,000	0	0	0	0	-1,000
1	0,588	0,166	0,050	-0,003	-0,140	-0,735
2	0,350	0,195	0,080	-0,018	-0,182	-0,500
3	0,228	0,165	0,075	-0,026	-0,162	-0,332
4	0,152	0,122	0,058	-0,025	-0,122	-0,215
5	0,101	0,083	0,038	-0,021	-0,085	-0,132
6	0,063	0,052	0,024	-0,015	-0,054	-0,075
7	0,036	0,030	0,012	-0,011	-0,031	-0,036
8	0,018	0,014	0,005	-0,006	-0,015	-0,013
9	0,005	0,005	0,002	-0,003	-0,005	-0,001
10	0	0	0	0	0	0

Напряжения τ_{xy}

0	0	0	0	0	0	0
1	0	0,114	0,045	0,030	0,080	0
2	0	0,090	0,085	0,084	0,095	0
3	0	0,068	0,092	0,099	0,086	0
4	0	0,052	0,082	0,090	0,069	0
5	0	0,040	0,065	0,072	0,052	0
6	0	0,030	0,049	0,053	0,038	0
7	0	0,021	0,035	0,037	0,025	0
8	0	0,014	0,023	0,024	0,015	0
9	0	0,008	0,013	0,012	0,007	0
10	0	0	0	0	0	0

Балка-стенка с отношением сторон 1:1 под действием нагрузок, приложенных в узлах $(x, y) = (0,0)$ и $(4,0)$; множитель для напряжений r_4 (см. рис. 67, б)

y	x					
	0	1	2	3	4	5

Напряжения σ_x

0	1,312	0,469	0,235	0,093	-0,330	0
1	0,108	0,280	0,179	0,072	0,111	0
2	-0,080	0,042	0,065	0,054	0,077	0
3	-0,118	-0,062	-0,017	0,009	0,026	0
4	-0,121	-0,095	-0,055	-0,022	0,000	0
5	-0,110	-0,095	-0,065	-0,033	-0,009	0
6	-0,093	-0,083	-0,061	-0,034	-0,011	0
7	-0,076	-0,069	-0,052	-0,030	-0,010	0
8	-0,064	-0,059	-0,045	-0,026	-0,009	0
9	-0,062	-0,057	-0,043	-0,025	-0,008	0
10	-0,079	-0,070	-0,048	-0,021	-0,002	0

Напряжения σ_y

0	2,000	0	0	0	-1,000	0
1	1,156	0,305	0,046	-0,140	-0,623	-0,330
2	0,656	0,338	0,085	-0,134	-0,397	-0,439
3	0,400	0,271	0,090	-0,093	-0,272	-0,392
4	0,255	0,194	0,075	-0,060	-0,190	-0,294
5	0,163	0,130	0,054	-0,039	-0,129	-0,196
6	0,101	0,082	0,034	-0,026	-0,082	-0,117
7	0,058	0,047	0,019	-0,017	-0,048	-0,059
8	0,028	0,022	0,008	-0,010	-0,024	-0,022
9	0,009	0,007	0,002	-0,004	-0,008	-0,002
10	0	0	0	0	0	0

Напряжения τ_{xy}

0	0	0	0	0	0	0
1	0	0,252	0,146	0,158	0,041	0
2	0	0,198	0,195	0,172	0,072	0
3	0	0,136	0,175	0,158	0,088	0
4	0	0,094	0,139	0,134	0,085	0
5	0	0,066	0,105	0,106	0,071	0
6	0	0,047	0,077	0,080	0,054	0
7	0	0,033	0,055	0,057	0,038	0
8	0	0,022	0,037	0,038	0,024	0
9	0	0,013	0,020	0,020	0,012	0
10	0	0	0	0	0	0

Балка-стенка с отношением сторон 1:1 под действием нагрузок, приложенных в узлах $(x, y) = (0,0)$ и $(3,0)$; множитель для напряжений r_3 (см. рис. 67, в)

y	x					
	0	1	2	3	4	5

Напряжения σ_x

0	1,215	0,350	0,018	—0,461	—0,063	0
1	0,015	0,183	0,089	0,115	—0,015	0
2	—0,120	0,011	0,069	0,120	0,033	0
3	—0,113	—0,050	0,018	0,059	0,026	0
4	—0,094	—0,063	—0,016	0,015	0,010	0
5	—0,076	—0,060	—0,031	—0,007	0,000	0
6	—0,061	—0,052	—0,033	—0,015	—0,004	0
7	—0,049	—0,044	—0,031	—0,017	—0,005	0
8	—0,042	—0,038	—0,028	—0,016	—0,005	0
9	—0,042	—0,038	—0,028	—0,016	—0,006	0
10	—0,054	—0,048	—0,033	—0,015	—0,002	0

Напряжения σ_y

0	2,000	0	0	—1,000	0	0
1	1,135	0,267	—0,073	—0,562	—0,168	—0,063
2	0,605	0,272	—0,026	—0,280	—0,190	—0,156
3	0,338	0,203	0,014	—0,137	—0,157	—0,184
4	0,198	0,138	0,029	—0,069	—0,117	—0,160
5	0,119	0,090	0,027	—0,037	—0,081	—0,117
6	0,071	0,056	0,020	—0,021	—0,053	—0,074
7	0,040	0,032	0,012	—0,012	—0,031	—0,039
8	0,019	0,015	0,005	—0,007	—0,016	—0,015
9	0,006	0,005	0,001	—0,003	—0,006	—0,002
10	0	0	0	0	0	0

Напряжения τ_{xy}

0	0	0	0	0	0	0
1	0	0,281	0,220	0,046	—0,087	0
2	0	0,215	0,209	0,081	—0,028	0
3	0	0,135	0,155	0,088	0,017	0
4	0	0,083	0,108	0,080	0,036	0
5	0	0,052	0,075	0,065	0,038	0
6	0	0,034	0,053	0,051	0,032	0
7	0	0,023	0,037	0,037	0,024	0
8	0	0,015	0,025	0,025	0,016	0
9	0	0,009	0,014	0,013	0,008	0
10	0	0	0	0	0	0

Балка-стенка с отношением сторон 1 : 1 под действием нагрузок, приложенных в узлах $(x, y) = (0,0)$ и $(2,0)$; множитель для напряжений τ_2 (см. рис. 67, з)

y	x					
	0	1	2	3	4	5

Напряжения σ_x

0	1,106	0,178	-0,462	-0,099	-0,008	0
1	-0,088	0,094	0,136	-0,014	-0,015	0
2	-0,149	0,002	0,112	0,042	0,008	0
3	-0,099	-0,027	0,046	0,035	0,012	0
4	-0,063	-0,032	0,008	0,015	0,007	0
5	-0,043	-0,030	-0,008	0,002	0,002	0
6	-0,032	-0,025	-0,013	-0,005	-0,001	0
7	-0,024	-0,021	-0,014	-0,007	-0,002	0
8	-0,021	-0,018	-0,013	-0,008	-0,003	0
9	-0,021	-0,019	-0,014	-0,008	-0,003	0
10	-0,027	-0,024	-0,016	-0,007	-0,001	0

Напряжения σ_y

0	2,000	0	-1,000	0	0	0
1	1,072	0,144	-0,498	-0,136	-0,042	-0,008
2	0,508	0,148	-0,187	-0,124	-0,067	-0,045
3	0,245	0,110	-0,055	-0,078	-0,066	-0,068
4	0,127	0,073	-0,008	-0,042	-0,053	-0,067
5	0,068	0,047	0,006	-0,022	-0,038	-0,053
6	0,039	0,029	0,007	-0,012	-0,026	-0,035
7	0,021	0,016	0,005	-0,007	-0,015	-0,019
8	0,011	0,008	0,002	-0,004	-0,008	-0,008
9	0,003	0,002	0,001	-0,001	-0,003	-0,001
10	0	0	0	0	0	0

Напряжения τ_{xy}

0	0	0	0	0	0	0
1	0	0,336	0,096	-0,076	-0,028	0
2	0	0,215	0,113	-0,012	-0,021	0
3	0	0,114	0,088	0,022	-0,002	0
4	0	0,060	0,060	0,031	0,011	0
5	0	0,033	0,041	0,029	0,015	0
6	0	0,020	0,028	0,024	0,014	0
7	0	0,012	0,019	0,018	0,011	0
8	0	0,008	0,012	0,012	0,008	0
9	0	0,004	0,007	0,007	0,004	0
10	0	0	0	0	0	0

Балка-стенка с отношением сторон 1:1 под действием нагрузок, приложенных в узлах $(x, y) = (0,0)$ и $(1,0)$; множитель для напряжений r_1 (см. рис. 67, б)

y	x					
	0	1	2	3	4	5

Напряжения σ_x

0	0,853	-0,301	-0,075	-0,015	0,000	0
1	-0,176	0,132	0,006	-0,008	-0,004	0
2	-0,124	0,050	0,027	0,008	0,001	0
3	-0,056	0,007	0,016	0,009	0,003	0
4	-0,026	-0,005	0,005	0,005	0,002	0
5	-0,014	-0,007	-0,001	0,001	0,001	0
6	-0,009	-0,006	-0,003	-0,001	0,000	0
7	-0,007	-0,006	-0,003	-0,002	-0,001	0
8	-0,006	-0,005	-0,003	-0,002	-0,001	0
9	-0,006	-0,005	-0,004	-0,002	-0,001	0
10	-0,007	-0,006	-0,004	-0,002	0,000	0

Напряжения σ_y

0	2,000	-1,000	0	0	0	0
1	0,845	-0,309	-0,083	-0,023	-0,007	0,000
2	0,305	-0,052	-0,054	-0,028	-0,014	-0,008
3	0,114	0,008	-0,022	-0,020	-0,015	-0,015
4	0,048	0,015	-0,006	-0,012	-0,013	-0,016
5	0,022	0,012	0,000	-0,007	-0,010	-0,013
6	0,012	0,008	0,001	-0,004	-0,007	-0,009
7	0,006	0,004	0,001	-0,002	-0,004	-0,005
8	0,004	0,002	0,001	-0,001	-0,002	-0,002
9	0,001	0,001	0,000	0,000	-0,001	0,000
10	0	0	0	0	0	0

Напряжения τ_{xy}

0	0	0	0	0	0	0
1	0	0,187	-0,037	-0,016	-0,006	0
2	0	0,103	0,009	-0,007	-0,006	0
3	0	0,048	0,019	0,003	-0,002	0
4	0	0,022	0,016	0,007	0,002	0
5	0	0,011	0,011	0,007	0,003	0
6	0	0,006	0,007	0,006	0,003	0
7	0	0,004	0,005	0,005	0,003	0
8	0	0,002	0,003	0,003	0,002	0
9	0	0,001	0,002	0,002	0,001	0
10	0	0	0	0	0	0

и одно уравнение проекций всех сил на вертикальную ось ($\Sigma V = 0$)

$$R_0 + 2(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) = 0. \quad (174)$$

При составлении уравнений все силы приняты направленными вверх (положительное направление); если в результате решения уравнений знак силы получается отрицательным, то эта сила считается направленной вниз.

Решая систему уравнений (173) и (174) относительно неизвестных R , находим

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= -\frac{2}{a} (M_0 - M_1); \\ R_1 &= \frac{1}{a} (M_0 - 2M_1 + M_2); \\ R_2 &= \frac{1}{a} (M_1 - 2M_2 + M_3); \\ R_3 &= \frac{1}{a} (M_2 - 2M_3 + M_4); \\ R_4 &= \frac{1}{a} (M_3 - 2M_4); \\ R_5 &= \frac{M_4}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

Полагаем, что полученные силы R являются равнодействующими равномерно распределенных по соответствующим участкам нагрузок r (рис. 68, *з*), т. е.

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \frac{R_0}{a}; \quad r_1 = \frac{R_1}{a}; \quad r_2 = \frac{R_2}{a}; \quad r_3 = \frac{R_3}{a}; \\ r_4 &= \frac{R_4}{a}; \quad r_5 = \frac{R_5}{0,5a}. \end{aligned} \right\} \quad (176)$$

Эти значения r являются множителями для напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} , определяемых по табл. 39—43.

ПЛИТЫ

Общие сведения

Железобетонная плита на упругом основании является важнейшим конструктивным элементом промышленного, гражданского, гидротехнического и аэродромно-дорожного строительства. В качестве примеров могут служить сплошные фундаментные плиты под многоэтажные каркасные и бескаркасные здания, сооружаемые на слабых грунтах; фундаменты промышленных этажерок, широко применяемых в химической, нефтяной, машиностроительной и других отраслях промышленности; фундаменты элеваторов; днища шлюзов; плиты полов производственных зданий; плиты покрытий аэропортов и автомобильных дорог и др.

В настоящее время имеется ряд более или менее приемлемых для практики решений для плит, лежащих на упругом основании постоянной жесткости. Наиболее подробно проработаны решения задач о неограниченной, о полубесконечной и круглой плитах. В литературе имеются таблицы и детальные указания по технике расчета такого рода плит [24]. Значительно более сложные решения получаются для прямоугольных плит конечных размеров и конечной жесткости. Однако и для этой категории плит имеются достаточно разработанные решения.

Что касается учета переменной в плане сооружения жесткости основания, то этот вопрос при расчете плит почти не рассматривался. Можно указать лишь на одну статью А. П. Варвака, где такого рода задачу предлагается решать методом конечных разностей [10].

Применение метода конечных разностей позволяет при помощи простого и доступного математического аппарата рассчитывать плиты, лежащие на упругом основании переменной жесткости и загруженные произвольной нагрузкой. Значение этого метода, как известно, еще более возросло в связи с применением электронно-вычислительной техники, чему способствовала в значительной степени его дискретная природа при неограниченных возможностях увеличения точности. Однако известно, что характер частной задачи требует развития некоторых принципиально решенных вопросов для того, чтобы можно было довести избранный путь решения задачи до числового результата с наименьшими затратами труда и времени.

Рассмотрим дифференциальное уравнение изгиба тонкой плиты на упругом основании

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{g}{D} - \frac{Kw}{D}, \quad (177)$$

где

w — прогибы плиты;

g — нормальная к срединной плоскости и распределенная по поверхности плиты нагрузка, знак которой принимается положительным, если направление ее совпадает с положительным направлением оси z ;

K — коэффициент жесткости основания, в общем случае переменный в плоскости плиты;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость плиты;

E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала плиты;

h — высота плиты.

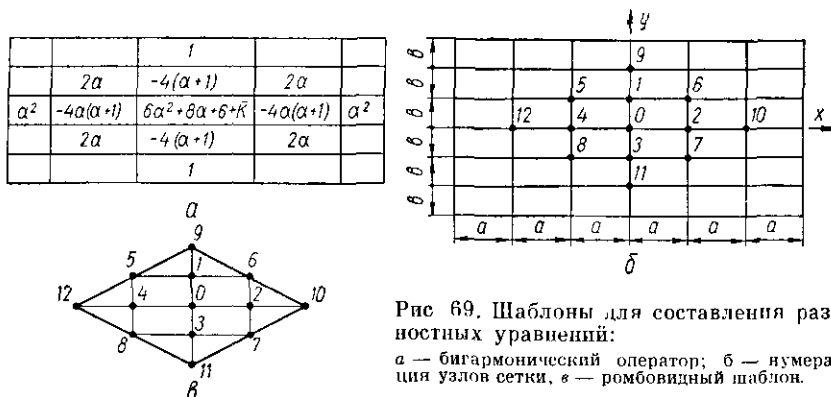


Рис 69. Шаблоны для составления разностных уравнений:

α — бигармонический оператор; δ — нумерация узлов сетки, ϵ — ромбовидный шаблон.

Уравнение (177) в форме конечных разностей для прямоугольной сетки при $\alpha = \frac{b^2}{a^2}$ (рис. 69, б) имеет вид

$$\begin{aligned} & (6\alpha^2 + 8\alpha + 6)w_0 - 4(\alpha + 1)(w_1 + \alpha w_2 + w_3 + \alpha w_4) + \\ & + 2\alpha(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + (w_9 + \alpha^2 w_{10} + w_{11} + \alpha^2 w_{12}) = \\ & = \bar{g}_0 - \bar{K}_0 w_0, \end{aligned} \quad (178)$$

где $\bar{g}_0 = \frac{g_0 b^4}{D}$ — приведенная интенсивность внешней нагрузки в точке 0;

$\bar{K}_0 = \frac{K_0 b^4}{D}$ — приведенный коэффициент жесткости основания в точке 0.

Уравнение (178) пишется для всех узлов сетки, расположенных внутри контура плиты, а при свободном опирании краев плиты на упругое основание — также и для узлов, лежащих на контуре плиты. В последнем случае при аппроксимации граничных условий возникает необходимость брать два ряда законтурных точек в расчетной сетке. Чтобы не увеличивать количество неизвестных, можно выразить все законтурные (фиктивные) точки через точки сетки на контуре и внутри плиты. После исключения законтурных точек уравнение (178) изменится как по количеству содержащихся в нем неизвестных, так и по выражениям для коэффициентов при них. Подобное изменение зависит от положения узла, для которого составляется разностное уравнение, по отношению к законтурным точкам.

Следует отметить, что составление разностных уравнений для свободно лежащей на упругом основании плиты сопряжено с несложными в принципе, но громоздкими алгебраическими преобразованиями. Поэтому упрощения, вносимые в практику составления разностных уравнений, весьма полезны. Именно на таких соображениях базируются излагаемые ниже вопросы расчета плит.

Формулы внеконтурных неизвестных

Зависимость между внутриконтурными и законтурными узлами сеточной области может быть легко установлена при известных граничных условиях, выраженных в форме конечных разностей. При свободных боковых сторонах плиты реактивные воздействия опорного контура — опорные изгибающие моменты и опорные реакции — отсутствуют. В этом случае имеем граничные условия для края, параллельного координатной оси x

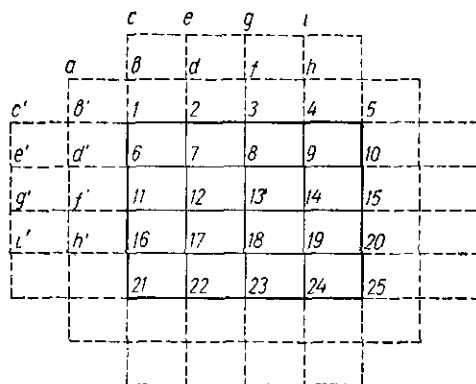


Рис. 70. Плита с сеткой 4×4 .

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0; \quad (179)$$

$$R_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = 0. \quad (180)$$

Так как $D \neq 0$, то

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad (181)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0. \quad (182)$$

Соответственно для края, параллельного оси y , получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad (183)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} = 0. \quad (184)$$

Запишем условия отсутствия изгибающих моментов и полных реакций в разностной форме для точек 1, 2, 3, 6, и 11 (рис. 70).

Точка 1:

$$\begin{aligned} (w_8 - 2w_1 + w_b) + \alpha \mu (w_{b'} - 2w_1 + w_2) &= 0; \\ (w_{11} - 2w_6 + 2w_b - w_c) + \alpha (2 - \mu) (w_{d'} - \\ &- w_a - 2w_6 + 2w_b + w_7 - w_d) = 0; \\ \alpha (w_{b'} - 2w_1 + w_2) + \mu (w_8 - 2w_1 + w_b) &= 0; \\ \alpha (w_{c'} - 2w_{b'} + 2w_2 - w_3) + (2 - \mu) (w_{d'} - \\ &- w_7 - 2w_{b'} + 2w_2 + w_a - w_d) = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, для точки 1 можно записать еще условие отсутствия крутящего момента

$$M_{xy} = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad (185)$$

которое в конечных разностях имеет вид

$$(w_{d'} + w_d) - (w_7 + w_a) = 0. \quad (186)$$

Точка 2:

$$\begin{aligned} (w_7 - 2w_2 + w_d) + \alpha \mu (w_1 - 2w_2 + w_3) &= 0; \\ (w_{12} - 2w_7 + 2w_d - w_e) + \alpha (2 - \mu) (w_6 - w_b - \\ &- 2w_7 + 2w_d + w_8 - w_f) = 0. \end{aligned}$$

Точка 3:

$$\begin{aligned} (w_8 - 2w_3 + w_f) - \alpha \mu (w_2 - 2w_3 + w_4) &= 0; \\ (w_{13} - 2w_8 + 2w_f - w_g) + \alpha (2 - \mu) (w_7 - w_d - 2w_8 + \\ &+ 2w_f + w_9 - w_h) = 0. \end{aligned}$$

Точка 6:

$$\begin{aligned} \alpha (w_{d'} - 2w_6 + w_7) + \mu (w_{11} - 2w_6 + w_1) &= 0; \\ \alpha (w_{e'} - 2w_{d'} + 2w_7 - w_8) + \\ + (2 - \mu) (w_{f'} - w_{12} - 2w_{d'} + 2w_7 + w_b - w_2) &= 0. \end{aligned}$$

Точка 11:

$$\alpha(w_{j'} - 2w_{11} + w_{12}) + \mu(w_{16} - 2w_{11} + w_8) = 0;$$

$$\alpha(w_{g'} - 2w_{j'} + 2w_{12} - w_{13}) + (2 - \mu)(w_{h'} - w_{17} - 2w_{j'} - \\ + 2w_{12} + w_{d'} - w_7) = 0.$$

Из приведенных уравнений получены следующие выражения для внеконтурных (буквенных) неизвестных в функции основных неизвестных:

$$w_a = 2(1 + \alpha\mu)w_2 + 2\left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\right)w_6 - \\ - \left(\alpha\mu + \frac{\mu}{\alpha}\right)w_1 - \alpha\mu w_3 - \frac{\mu}{\alpha}w_{11} - 3w_7; \quad (187)$$

$$w_b = 2w_1 - w_8; \quad (188)$$

$$w_{b'} = 2w_1 - w_2; \quad (189)$$

$$w_c = 4[1 + 2\alpha + \alpha\mu(\alpha - 0,5\alpha\mu - 1)]w_1 - 4\alpha(2 - \mu)(1 + \alpha\mu)w_2 + \\ + 2\alpha^2\mu(2 - \mu)w_3 - 4[1 + \alpha(2 - \mu)]w_8 + 4\alpha(2 - \mu)w_7 + w_{11}; \quad (190)$$

$$w_{c'} = 4\left[1 + \frac{2}{\alpha} + \frac{\mu}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\mu}{2\alpha} - 1\right)\right]w_1 - \frac{4}{\alpha}(2 - \mu)\left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\right)w_6 + \\ + \frac{2}{\alpha^2}\mu(2 - \mu)w_{11} - 4\left[1 + \frac{2 - \mu}{\alpha}\right]w_2 + \frac{4}{\alpha}(2 - \mu)w_7 + w_8; \quad (191)$$

$$w_d = 2(1 + \alpha\mu)w_2 - \alpha\mu w_1 - \alpha\mu w_3 - w_7; \quad (192)$$

$$w_{d'} = 2\left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\right)w_6 - \frac{\mu}{\alpha}w_1 - \frac{\mu}{\alpha}w_{11} - w_7; \quad (193)$$

$$w_e = -2\alpha[2 + \alpha\mu(2 - \mu)]w_1 + [4(1 + 2\alpha) + 5\alpha^2\mu(2 - \mu)]w_2 - \\ - 4\alpha[1 + \alpha\mu(2 - \mu)]w_3 + \alpha^2\mu(2 - \mu)w_4 + 2\alpha(2 - \mu)w_8 - \\ - 4[1 + \alpha(2 - \mu)]w_7 + 2\alpha(2 - \mu)w_8 + w_{12}; \quad (194)$$

$$w_{e'} = -\frac{2}{\alpha}\left[2 + \frac{\mu}{\alpha}(2 - \mu)\right]w_1 + \left[4\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) + \frac{5\mu}{\alpha}(2 - \mu)\right]w_6 - \\ - \frac{4}{\alpha}\left[1 + \frac{\mu}{\alpha}(2 - \mu)\right]w_{11} + \frac{\mu}{\alpha^2}(2 - \mu)w_{16} + \frac{2}{\alpha}(2 - \mu)w_2 - \\ - 4\left[1 + \frac{2 - \mu}{\alpha}\right]w_7 + \frac{2}{\alpha}(2 - \mu)w_{12} + w_8; \quad (195)$$

$$w_g = \alpha^2\mu(2 - \mu)w_1 - 4\alpha[1 + \alpha\mu(2 - \mu)]w_2 + [4(1 + 2\alpha) + \\ + 6\alpha^2\mu(2 - \mu)]w_3 - 4\alpha[1 + \alpha\mu(2 - \mu)]w_4 + \\ + \alpha^2\mu(2 - \mu)w_8 + 2\alpha(2 - \mu)w_7 - 4[1 + \alpha(2 - \mu)]w_8 + \\ + 2\alpha(2 - \mu)w_9 + w_{13}; \quad (196)$$

$$w_{g'} = \frac{\mu}{\alpha^2}(2 - \mu)w_{21} - \frac{4}{\alpha}\left[1 + \frac{\mu}{\alpha}(2 - \mu)\right]w_{16} + \left[4\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) + \right. \\ \left. + \frac{6\mu}{\alpha^2}(2 - \mu)\right]w_{11} - \frac{4}{\alpha}\left[1 + \frac{\mu}{\alpha}(2 - \mu)\right]w_8 + \frac{\mu}{\alpha^2}(2 - \mu)w_1 + \\ + \frac{2}{\alpha}(2 - \mu)w_{17} - 4\left[1 + \frac{2 - \mu}{\alpha}\right]w_{12} + \frac{2}{\alpha}(2 - \mu)w_7 + w_{13}. \quad (197)$$

Формулы (187)–(197) охватывают все виды законтурных неизвестных. На рис. 70 принята практически минимальная сетка 4×4 ; при большем числе шагов сетки выражения для всех промежуточных первых законтурных точек, расположенных на расстоянии двух и более шагов от угловой точки, принимаются по формуле для $w_d (w_{d'})$ с постановкой соответствующих основных неизвестных. Например:

$$w_f = 2(1 + \alpha\mu)w_3 - \alpha\mu w_2 - \alpha\mu w_4 - w_8 \quad (198)$$

Вторые законтурные точки, расположенные у края плиты, параллельного оси x , на два и более шага от угловой точки, определяются на основании формулы для w_g ; а законтурные точки у края плиты, параллельного оси y , — по формуле для $w_{g'}$.

Для железобетонных плит коэффициент Пуассона $\mu = 0,15$; при квадратной сетке $\alpha = 1$. В этом случае выражения для законтурных неизвестных, содержащие коэффициенты, зависящие от μ и α , приобретают вид

$$w_a = 2,3w_2 + 2,3w_6 - 0,3w_1 - 0,15w_3 - 0,15w_{11} - 3w_7, \quad (187')$$

$$w_c = 11,955w_1 - 8,51w_2 + 0,555w_4 - 11,4w_6 + 7,4w_7 + w_{11}; \quad (190')$$

$$w_e = 11,955w_1 - 8,51w_6 + 0,555w_{11} - 11,4w_2 + 7,4w_7 + w_3; \quad (191')$$

$$w_d = 2,3w_2 - 0,15w_1 - 0,15w_3 - w_7, \quad (192')$$

$$w_{d'} = 2,3w_6 - 0,15w_1 - 0,15w_{11} - w_7; \quad (193')$$

$$w_e = -4,555w_1 + 13,3875w_2 - 5,11w_3 + 0,2775w_4 + 3,7w_6 - 11,4w_7 + 3,7w_8 + w_{12}, \quad (194')$$

$$w_{e'} = -4,555w_1 + 13,3875w_6 - 5,11w_{11} + 0,2775w_{16} + 3,7w_2 - 11,4w_7 + 3,7w_{12} + w_8, \quad (195')$$

$$w_g = 0,2775w_1 - 5,11w_2 + 13,665w_3 - 5,11w_4 + 0,2775w_8 + 3,7w_7 - 11,4w_8 + 3,7w_9 + w_{13}, \quad (196')$$

$$w_{g'} = 0,2775w_{21} - 5,11w_{16} + 13,665w_{11} - 5,11w_6 + 0,2775w_1 + 3,7w_{17} - 11,4w_{12} + 3,7w_7 + w_{18}. \quad (197')$$

Составление расчетных уравнений

При расчете свободно лежащей на упругом основании плиты необходимо составить в общем случае столько уравнений, сколько имеется узлов в выбранной сеточной области, включая и контурные. Для облегчения составления уравнений целесообразно использовать понятие графического эквивалента конечно-разностного оператора. Конечно-разностный оператор бигармонического уравнения (177) представлен на рис. 69, а, а его графический эквивалент — на рис. 69, б. Если последний заключить в рамку, то получим ромбовидный шаблон (рис. 69, в), оперирование с которым значительно упрощает составление разностного уравнения во-

круг произвольной точки сеточной области. Для удобства шаблон делается из прозрачной бумаги — кальки, что облегчает сопоставление точек шаблона и соответствующих точек находящейся под ним сеточной области. Его форма должна соответствовать клеточной разбивке принятой сетки; поэтому он может быть совмещен, вернее — его центр, с любой точкой сеточной области.

Шаблон в плоскости чертежа может быть передвинут на целое число клеток по направлениям, параллельным координатным осям. Поворот шаблона исключается.

Если центр шаблона O будет совмещен с центром сеточной области, изображенной на рис. 70, то при составлении разностного уравнения для точки 13 в него войдут функции w всех точек шаблона с соответствующими коэффициентами. В этом случае мы получим полное 13-членное уравнение. Последовательность написания членов уравнения определится нумерацией точек шаблона, а номера точек сеточной области определяют индексы функций w , участвующих в уравнении

$$\begin{aligned} (6\alpha^2 + 8\alpha + 6 + \bar{K}_{13}) w_{13} - 4(\alpha + 1) w_8 - 4\alpha(\alpha + 1) w_{14} - \\ - 4(\alpha + 1) w_{18} - 4\alpha(\alpha + 1) w_{12} + 2\alpha w_7 + 2\alpha w_9 + 2\alpha w_{19} + \\ + 2\alpha w_{17} + w_3 + \alpha^2 w_{15} + w_{23} + \alpha^2 w_{11} = \bar{g}_{13}. \end{aligned} \quad (199)$$

При составлении уравнений для приконтурных и контурных точек в них появятся законтурные неизвестные. Последние следует выразить в функции неизвестных, принадлежащих плите, по формулам, приведенным в предыдущем параграфе. Таким образом, в окончательном, преобразованном виде разностные уравнения для точек, расположенных на расстоянии, меньшем двух шагов от контура, не будут содержать функций, отвечающих законтурным точкам.

Например, запишем уравнение для точки 2, лежащей на контуре плиты (рис. 70)

$$\begin{aligned} (6\alpha^2 + 8\alpha + 6 + \bar{K}_2) w_2 - 4(\alpha + 1) w_d - 4\alpha(\alpha + 1) w_3 - \\ - 4(\alpha + 1) w_7 - 4\alpha(\alpha + 1) w_1 + 2\alpha w_b + 2\alpha w_f + 2\alpha w_8 + \\ + 2\alpha w_e + w_e + \alpha^2 w_4 + w_{12} + \alpha^2 w_b = \bar{g}_2. \end{aligned}$$

Подставляя в это уравнение выражения неизвестных w_d, w_b, w_f, w_e, w_b , по формулам (188), (189), (192), (194) и (198) после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \{\alpha[8(1 - \mu) + 5\alpha(1 - \mu^2)] + 2 + \bar{K}_2\} w_2 + 4\alpha[\mu(1 + \alpha\mu) - \\ - (\alpha + 1)] w_3 - 4[1 + \alpha(2 - \mu)] w_7 + 2\alpha[\mu(2 + \alpha\mu) - \\ - (2 + \alpha)] w_1 + 2\alpha(2 - \mu) w_8 + 2\alpha(2 - \mu) w_e + \alpha^2(1 - \mu^2) w_4 + \\ + 2w_{12} = \bar{g}_2. \end{aligned}$$

Вид разностного уравнения для какой-либо контурной или приконтурной точки будет меняться в зависимости от местоположения этой точки. Для каждой из таких точек необходимо произвести преобразования, подобные приведенным для точки 2.

В целях радикального упрощения составления уравнений для любых точек сеточной области в следующем параграфе приводятся готовые формулы коэффициентов при неизвестных любого разностного уравнения, позволяющие сразу выписывать требуемое уравнение.

После решения системы разностных уравнений и нахождения неизвестных значений прогибов w можно легко определить все силовые факторы по формулам (рис. 69, б):

погонный изгибающий момент в направлении оси x

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -\frac{D}{b^2} [\alpha (w_4 - 2w_0 + w_2) + \mu (w_3 - 2w_0 + w_1)]; \quad (200)$$

погонный изгибающий момент в направлении оси y

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\frac{D}{b^2} [(w_3 - 2w_0 + w_1) + \alpha \mu (w_4 - 2w_0 + w_2)]; \quad (201)$$

погонный крутящий момент

$$M_{xy} = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{D(1 - \mu)}{4ab} [(w_8 + w_6) - (w_7 + w_5)]; \quad (202)$$

погонная поперечная сила в направлении оси x

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -\frac{D}{2ab^2} [\alpha (w_{12} - 2w_4 + 2w_2 - w_{10}) + (w_8 - w_7 - 2w_4 + 2w_2 + w_5 - w_6)]; \quad (203)$$

погонная поперечная сила в направлении оси y

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = -\frac{D}{2b^3} [\alpha (w_8 - w_5 - 2w_3 + 2w_1 + w_7 - w_6) + (w_{11} - 2w_3 + 2w_1 - w_9)]. \quad (204)$$

Алгоритм расчета прямоугольных плит

Для расчета методом конечных разностей на плиту наносится прямоугольная регулярная сетка. Узловые точки на пересечении линий сетки обозначаем двойными индексами i, j , где i — номер горизонтальной линии, j — вертикальной (рис. 71). Количество узлов по горизонтали — m , по вертикали — n .

Исходными данными являются: коэффициенты жесткости основания в точках i, j , $K_{i,j}$; интенсивности нагрузки $g_{i,j}$ ($i = 1,$

2, ..., n) ($j = 1, 2, \dots, m$); цилиндрическая жесткость плиты D ; шаг сетки по горизонтали a , по вертикали b .

Вычисляются приведенные значения коэффициента жесткости; приведенная нагрузка и параметр α :

$$\bar{K}_{i,j} = K_{i,j} \frac{b^4}{D}; \quad (205)$$

$$\bar{g}_{i,j} = g_{i,j} \frac{b^4}{D}; \quad (206)$$

$$\alpha = \left(\frac{b}{a} \right)^2. \quad (207)$$

В зависимости от численных значений индексов i, j узловых точек (контурных, предконтурных и внутренних), для которых требуется составить разностные уравнения, по табл. 44 находим соответствующие этим индексам значения параметров V, A и B .

По найденному значению V в табл. 45 находим графу, где приведены формулы коэффициентов при всех неизвестных уравнения для точек i, j . Подставляя в эти формулы значения A и B , отве-

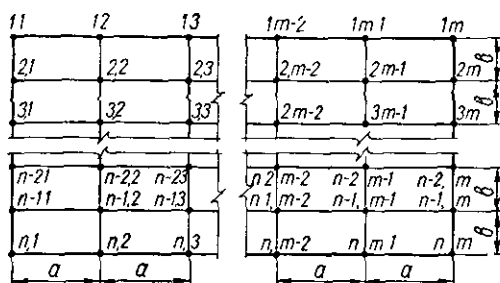


Рис. 71. Нумерация узлов сетки при пользовании таблицей

чающие индексам i, j , а также величины $\alpha, \mu, \bar{K}_{i,j}$, вычисляем численные значения коэффициентов при неизвестных.

Свободный член уравнения равен $\bar{g}_{i,j}$.

Для иллюстрации пользования табл. 44 и 45 рассмотрим численный пример.

Пусть $m = n = 6, \alpha = 1, \mu = 0,15$. Требуется составить уравнение для точки $i, j = 2,3$, в которой $\bar{K}_{2,3} = 2, \bar{g}_{2,3} = 9$ см.

По табл. 44 при $i = 2, j = 3$ (строка 8) находим $V = 6, A = 1, B = 0$. Следовательно, формулы коэффициентов при всех неизвестных уравнения для точек 2, 3 необходимо взять из графы $V = 6$ табл. 45. Подставляя в эти формулы значения $A = 1$ и $B = 0$, получим

$$0w_{0,3} + 1,85w_{1,2} - 5,7w_{1,3} + 1,85w_{1,4} + w_{2,1} - 8w_{2,2} + 21w_{2,3} - 8w_{2,4} + w_{2,5} + 2w_{3,2} - 8w_{3,3} + 2w_{3,4} + w_{4,3} = 9.$$

Из приведенного примера видно, что формирование уравнений осуществляется весьма просто, причем здесь уже учтены граничные условия в виде свободного опирания краев плиты. Реша

Значения параметров V , A и B

№ п. п.	Значения		V	A	B
	i	j			
1	1	1	1	1	0
2		2	2	1	0
3		$2 < j < m - 1$	3	1	0
4		$m - 1$	2	0	-1
5		m	1	0	-1
6	2	1	4	1	0
7		2	5	1	0
8		$2 < j < m - 1$	6	1	0
9		$m - 1$	5	0	-1
10		m	4	0	-1
11	$2 < i < n - 1$	1	3	0	1
12		2	6	0	1
13		$2 < j < m - 1$	7	1	—
14		$m - 1$	6	0	-1
15		m	3	0	-1
16	$i = n - 1$	1	4	0	1
17		2	5	0	1
18		$2 < j < m - 1$	6	-1	0
19		$m - 1$	5	-1	0
20		m	4	-1	0
21	$i = n$	1	1	0	1
22		2	2	0	1
23		$2 < j < m - 1$	3	-1	0
24		$m - 1$	2	-1	0
25		m	1	-1	0

Формулы коэффициентов при неизвестных разностных уравнений

Неизвестные	V						
	1	2	3	4	5	6	7
$w_{i-2, j}$	$\frac{(1-\mu^2) \times}{\times (1-A+B)}$	$1-A+B$	$1-\mu^2 B^2-A$	$0,5(1-\mu^2) \times$ $\times (1-A+B)$	$0,5(1-A+B)$	$1-0,5(A^2+A)$	A
$w_{i-1, j-1}$	$\frac{4\alpha(1-\mu) \times}{\times (A^2-A)}$	$\frac{\alpha(2-\mu) \times}{\times (1-A+B)}$	$\frac{\alpha(2-\mu) \times}{\times (1-A-B)}$	$\frac{\alpha(2-\mu) \times}{\times (1-A-B)}$	$2\alpha-\alpha\mu(1+A)$	$2\alpha-0,5\alpha\mu \times$ $\times (1+A+B)$	$2\alpha A$
$w_{i-1, j}$	$\frac{2(\mu-1)(2\alpha+}{+ \mu+1) \times}{\times (1-A+B)}$	$\frac{2(\alpha\mu-2\alpha-}{-1) \times (1-}{-A+B)}$	$\frac{4(\mu-1)(\mu+}{+ \alpha+1) B^2+}{+ 2(\alpha\mu-}{-2\alpha-1) \times}{\times (A^2-A)}$	$\frac{(\mu-1)(3\mu+}{+ 4\alpha+3)-}{-(\mu^2-1) \times}{\times (A-B)}$	$\frac{(\alpha\mu-4\alpha-}{-3)+(\alpha\mu+}{+ 1)(A-B)}$	$\frac{-4(\alpha+1)+}{+(\alpha\mu+1) \times}{\times (A^2+A)}$	$\frac{-4(\alpha+}{+1) A}$
$w_{i-1, j+1}$	$\frac{4\alpha(1-\mu) \times}{\times (B^2+B)}$	$\frac{\alpha(2-\mu)(1-}{-A+B)}$	$\frac{\alpha(2-\mu)(1-}{-A+B)}$	$\frac{\alpha(2-\mu)(1+}{+ A+B)}$	$\frac{\alpha[2-\mu) \times}{\times (A^2+B^2)+}{+ \mu B]$	$\frac{2\alpha-0,5\alpha\mu \times}{\times (1+A-B)}$	$2\alpha A$
$w_{i, j-2}$	$\frac{\alpha^2(1-\mu^2) \times}{\times (1-A-B)}$	$\frac{0,5\alpha^2(1-}{-\mu^2) \times (1-}{-A-B)}$	$\frac{\alpha^2(1-\mu^2 A^2+}{+ B)}$	$\alpha^2(1-A-B)$	$\frac{0,5\alpha^2(1-A-}{-B)}$	$\frac{\alpha^2-0,5\alpha^2 \times}{\times (B^2+B)}$	$\alpha^2 A$
$w_{i, j-1}$	$\frac{2\alpha(\mu-1) \times}{\times (2+\alpha\mu+}{+ \alpha)(1-A-}{-B)}$	$\frac{\alpha(\mu-1) \times}{\times (3\alpha\mu+}{+ 3\alpha+4)-}{-\alpha^2(\mu^2-}{-1)(A+B)}$	$\frac{4\alpha(\mu-1) \times}{\times (\alpha\mu+ \alpha+}{+ 1) A^2+ 2\alpha \times}{\times (\mu-\alpha-}{-2) \times (B^2-B)}$	$\frac{2\alpha(\mu-2-}{-\alpha) \times (1-}{-A-B)}$	$\frac{\alpha(\mu-3\alpha-}{-4)+\alpha(\mu+}{+ \alpha)(A+B)}$	$\frac{-4\alpha(\alpha+1)+}{+ \alpha(\alpha+\mu) \times}{\times (B^2+B)}$	$\frac{-4\alpha(\alpha+}{+1) A}$

Неизвестные	V						
	1	2	3	4	5	6	7
$w_{i,j}$	$2(1-\mu)[4\alpha + (1+\mu)\alpha + (1+\alpha^2)] + \bar{K}_{i,j}$	$\alpha(1-\mu)(5\alpha + 5\alpha\mu + 8) + 2 + \bar{K}_{i,j}$	$[2\alpha(1-\mu) \times (3\alpha + 3\alpha\mu + 4) + 2]A^2 + [2(1-\mu) \times (3 + 3\mu + 4\alpha) + 2\alpha^2]B^2 + \bar{K}_{i,j}$	$(1-\mu)(5 + 5\mu + 8\alpha) + 2\alpha^2 + \bar{K}_{i,j}$	$5\alpha^2 + 8\alpha + 5 + \bar{K}_{i,j}$	$5\alpha^2 + 8\alpha + 6 + (\alpha^2 - 1)A^2 + \bar{K}_{i,j}$	$(6\alpha^2 + 8\alpha + 6)A + \bar{K}_{i,j}$
$w_{i,j+1}$	$2\alpha(\mu-1) \times (2 + \alpha\mu + \alpha) + (1+A+B)$	$\alpha(\mu-1) \times (3\alpha\mu + 3\alpha + 4) + \alpha^2 \times (\mu^2 - 1) \times (A+B)$	$4\alpha(\mu-1) \times (\alpha\mu + \alpha + 1)A^2 + 2\alpha \times (\mu - \alpha - B) \times (B^2 + B)$	$2\alpha(\mu-2 - \alpha) \times (1 + A+B)$	$\alpha(\mu-3\alpha - 4) - \alpha(\mu + \alpha)(A+B)$	$-4\alpha(\alpha+1) + \alpha(\alpha+\mu) \times (B^2 - B)$	$-4\alpha(\alpha + 1)A$
$w_{i,j+2}$	$\alpha^2(1-\mu^2) \times (1+A+B)$	$0,5\alpha^2(1-\mu^2) \times (1+A+B)$	$\alpha^2(1-\mu^2)A^2 + B$	$\alpha^2(1+A+B)$	$0,5\alpha^2(1+A+B)$	$\alpha^2 - 0,5\alpha^2 \times (B^2 - B)$	α^2A
$w_{i+1,j-1}$	$4\alpha(1-\mu) \times (B^2 - B)$	$\alpha(2-\mu)(1 + A - B)$	$\alpha(2-\mu)(1 + A - B)$	$\alpha(2-\mu)(1 - A - B)$	$\alpha[(2-\mu)(A^2 + B^2) - \mu B]$	$2\alpha - 0,5\alpha\mu(1 - A + B)$	$2\alpha A$
$w_{i+1,j}$	$2(\mu-1) \times (2\alpha + \mu + 1)(1+A-B)$	$2(\alpha\mu - 2\alpha - 1) \times (1 + A - B)$	$4(\mu-1)(\mu + \alpha + 1) \times B^2 + 2(\alpha\mu - 2\alpha - 1) \times (A^2 + A)$	$(\mu-1)(3\mu + 4\alpha + 3) + (\mu^2 - 1) \times (A - B)$	$(\alpha\mu - 4\alpha - 3) + (\alpha\mu + 1)(B - A)$	$-4(\alpha+1) + (\alpha\mu + 1) \times (A^2 + A)$	$-4(\alpha + 1)A$
$w_{i+1,j+1}$	$4\alpha(1-\mu) \times (A^2 + A)$	$\alpha(2-\mu)(1 + A - B)$	$\alpha(2-\mu)(1 + A + B)$	$\alpha(2-\mu)(1 + A + B)$	$2\alpha - \alpha\mu(1 - A)$	$2\alpha - 0,5\alpha\mu(1 - A - B)$	$2\alpha A$
$w_{i+2,j}$	$(1-\mu^2)(1 + A - B)$	$1 + 1A - B$	$1 - \mu^2 B^2 + A$	$0,5(1 - \mu^2) \times (1 + A - B)$	$0,5(1 + A - B)$	$1 - 0,5(A^2 - A)$	A

систему уравнений, записанных для каждого узла сетки, находим прогибы плиты, а по ним определяем нужные силовые факторы.

Заметим, что в приведенном примере появилось неизвестное $w_{0,3}$ с индексом 0, которого нет на схеме плиты (рис. 71). При составлении уравнений для контурных и некоторых предконтурных узлов могут появиться также отрицательные индексы при неизвестных. Наличие нулевого или отрицательного индекса указывает на отсутствие такого неизвестного; к тому же коэффициент при нем после подстановки соответствующих значений A и B всегда будет равен нулю.

Описанный алгоритм может быть применен для расчета прямоугольных плит с любым соотношением сторон и при любом законе изменения коэффициента жесткости основания.

Расчет круглых плит

При расчете круглых плит удобно пользоваться полярными координатами. В этом случае основное дифференциальное уравнение изгиба плиты на упругом основании (177) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{g}{D} - \frac{Kw}{D}. \quad (208)$$

Решение этого уравнения при произвольном законе изменения коэффициента жесткости основания K и произвольной нагрузке целесообразно производить методом конечных разностей. Для радиальной решетки регулярной структуры уравнение (208) в конечных разностях запишется так (рис. 72):

$$\begin{aligned} A_0 w_0 - A_{13} (w_1 + w_3) + A_2 w_2 - A_4 w_4 + A_{58} (w_5 + w_8) + \\ + A_{67} (w_6 + w_7) + A_{9,11} (w_9 + w_{11}) + A_{10} w_{10} + A_{12} w_{12} = \\ = \frac{g_0}{D} - \frac{K_0 w_0}{D}, \end{aligned} \quad (209)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 = \frac{6}{a^4} + \frac{1}{2a^3} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_4} \right) - \frac{1}{4r_0 a^2} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} \right) + \\ + \frac{8}{a^2 \left(2r_0 \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2} + \frac{3}{8 \left(r_0 \sin \frac{\varphi}{2} \right)^4}; \end{aligned}$$

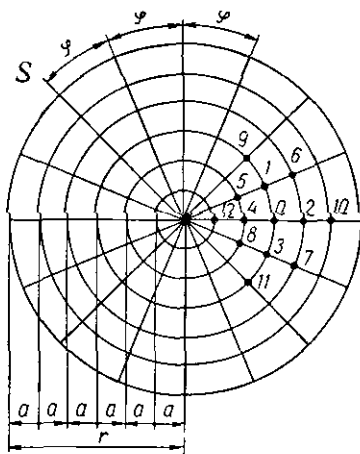


Рис. 72. Круглая плита с нанесенной радиальной решеткой регулярной структуры.

$$\begin{aligned}
A_{13} &= \frac{1}{\left(r_0 \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2} \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(2r_0 \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2} \right]; \\
A_2 &= \left(\frac{1}{2r_0} - \frac{1}{a} \right) \left[\frac{4}{a^3} + \frac{1}{2a \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) \right]; \\
A_4 &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2r_0} \right) \left[\frac{4}{a^3} + \frac{1}{2a \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_4^2} \right) \right]; \\
A_{58} &= \frac{1}{a \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2} \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_4^2} \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2r_0} \right); \\
A_{67} &= \frac{1}{4a \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2r_0} \right); \\
A_{9,tt} &= \frac{1}{2 \left(r_0 \sin \frac{\varphi}{2} \right)^4}; \\
A_{10} &= \frac{1}{a^4} + \frac{1}{2a^3} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4a^2} \frac{1}{r_0 r_2}; \\
A_{12} &= \frac{1}{a^4} + \frac{1}{2a^3} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_4} \right) + \frac{1}{4a^2} \frac{1}{r_0 r_4}.
\end{aligned}$$

Выражения для законтурных фиктивных неизвестных определяются из граничных условий подобно тому, как это делалось для прямоугольной плиты. Но в случае круглой плиты формулы получаются более громоздкими. Подробно этот вопрос рассматривать не будем, поскольку дальнейший ход решения задачи аналогичен рассмотренному выше для прямоугольных плит.

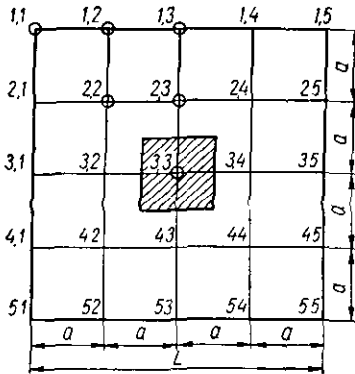


Рис. 73. Схема квадратной плиты, нагруженной в центре.

Пример расчета

Требуется рассчитать квадратную железобетонную плиту, свободно лежащую на грунтовом основании постоянной жесткости K . Плита нагружена сосредоточенной силой N , приложенной в ее центре.

Наносим на плиту квадратную сетку 4×4 с шагом $a \approx \frac{L}{4}$. Сосредоточенную силу N приводим к равномерно распределенной

по площадке $a \times a$ нагрузке $g = \frac{N}{a^2}$, приложенной в центре плиты (рис. 73).

$$\text{Пусть } \bar{K} = K \frac{a^3}{D} = 1; \bar{g} = g \frac{a^4}{D},$$

где D — цилиндрическая жесткость плиты.

Узлы сетки нумеруем от 1,1 по 5,5 в соответствии с принятым в алгоритме расчета прямоугольных плит правилом.

Вследствие симметрии плиты и нагрузки неизвестными будут прогибы в узлах 1,1; 1,2; 1,3; 2,2; 2,3, и 3,3, обозначенных на рис. 73 кружками.

Запишем уравнение для узла $i, j = 1,1$. При $i = 1$ и $j = 1$ в табл. 44 $V = 1, A = 1, B = 0$. По табл. 45 из графы для $V = 1$ выписываем искомое уравнение, в формулы коэффициентов которого сразу подставляем $A = 1$ и $B = 0$

$$\begin{aligned} \{2(1-\mu)[4\alpha + (1+\mu)(1+\alpha^2)] + \bar{K}\} w_{1,1} + [4\alpha(\mu-1)(2+\alpha\mu + \\ + \alpha)] w_{1,2} + 2\alpha^2(1-\mu^2) w_{1,3} + 4(\mu-1)(2\alpha + \mu + 1) w_{2,1} + \\ + 8\alpha(1-\mu) w_{2,2} + 2(1-\mu^2) w_{3,1} = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что неизвестные с нулевыми и отрицательными индексами не рассматривались.

Подставляя в полученное уравнение значения $\alpha = 1, \mu = \frac{1}{6}$ и $\bar{K} = 1$, будем иметь

$$11,55556w_{1,1} - 10,55556w_{1,2} + 1,94444w_{1,3} - 10,55556w_{2,1} + \\ + 6,66667w_{2,2} + 1,94444w_{3,1} = 0.$$

Учитывая, что $w_{2,1} = w_{1,2}$ и $w_{3,1} = w_{1,3}$, окончательно получим

$$11,55556w_{1,1} - 21,11112w_{1,2} + 3,88888w_{1,3} + 6,66667w_{2,2} = 0.$$

Подобным путем составлены уравнения для остальных узлов. Ниже приводим окончательный результат в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} 11,55556w_{1,1} - 21,11112w_{1,2} + 3,88888w_{1,3} + 6,66667w_{2,2} = 0; \\ -5,27776w_{1,1} + 19,16667w_{1,2} - 7,22222w_{1,3} - 11,33333w_{2,2} + \\ + 5,66667w_{2,3} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1,94444w_{1,1} - 14,44444w_{1,2} + 15,5w_{1,3} + 7,33333w_{2,2} - \\ - 11,33333w_{2,3} + 2w_{3,3} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1,66667w_{1,1} - 11,33333w_{1,2} + 3,66667w_{1,3} + \\ + 21w_{2,2} - 16w_{2,3} + 2w_{3,3} = 0; \end{aligned}$$

$$5,66667w_{1,2} - 5,66667w_{1,3} - 16w_{2,2} + 25w_{2,3} - 8w_{3,3} = 0;$$

$$4w_{1,3} + 8w_{2,2} - 32w_{2,3} + 21w_{3,3} = \bar{g}.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$w_{1,1} = -0,01197\bar{g}; \quad w_{1,2} = 0,02232\bar{g}; \quad w_{1,3} = 0,04300\bar{g}; \\ w_{2,2} = 0,06635\bar{g}; \quad w_{2,3} = 0,10086\bar{g}; \quad w_{3,3} = 0,16784\bar{g}.$$

Рассмотренный простейший пример квадратной плиты, нагруженной равномерно распределенной по площадке $\frac{L}{4} \times \frac{L}{4}$ нагрузкой, действующей в центре у узла 3,3, решен с использованием описанного выше алгоритма расчета прямоугольных свободно лежащих на упругом основании плит. Такой же пример решен А. П. Варваком по обычной методике конечных разностей [9]. Результаты обоих расчетов полностью совпадают.

Ряды числовых коэффициентов, встречающихся в уравнениях для расчета балок

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	41	28	30	120	65	5	60	10	2	1	60	20	4	85
2	91	177	180	480	310	75	240	80	6	4	240	160	49	215
3	161	566	570	1 200	855	325	600	270	12	9	540	540	194	405
4	251	1 315	1 320	2 400	1 820	875	1 200	640	20	16	960	1 280	499	655
5	361	2 544	2 550	4 200	3 325	1 845	2 100	1 250	30	25	1 500	2 500	1 024	965
6	491	4 373	4 380	6 720	5 490	3 355	3 360	2 160	42	36	2 160	4 320	1 829	1 335
7	641	6 922	6 930	10 080	8 435	5 525	5 040	3 430	56	49	2 940	6 860	2 974	1 765
8	811	10 311	10 320	14 400	12 280	8 475	7 200	5 120	72	64	3 840	10 240	4 519	2 255
9	1 001	14 660	14 670	19 800	17 145	12 325	9 900	7 290	90	81	4 860	14 580	6 524	2 805
10	1 211	20 089	20 100	26 400	23 150	17 195	13 200	10 000	110	100	6 000	20 000	9 049	3 415
11	1 441	26 718	26 730	34 320	30 415	23 205	17 160	13 310	132	121	7 260	26 620	12 154	4 085
12	1 691	34 667	34 680	43 680	39 060	30 475	21 840	17 280	156	144	8 640	34 560	15 899	4 825
13	1 961	44 056	44 070	54 600	43 205	39 125	27 300	21 970	182	169	10 140	43 940	20 344	5 625
14	2 251	55 105	55 020	67 200	60 970	49 275	33 600	27 440	210	196	11 760	54 880	25 549	6 485
15	2 561	67 834	67 650	81 600	74 475	61 045	40 800	33 750	240	225	13 500	67 500	31 574	7 405
16	2 891	82 363	82 080	97 920	89 840	74 555	48 960	40 960	272	256	15 360	81 920	38 479	8 385
17	3 241	98 812	98 430	116 280	107 185	89 925	58 140	49 130	306	289	17 340	98 260	46 324	9 425
18	3 611	117 301	116 820	136 800	126 630	107 275	68 400	58 320	342	324	19 340	116 640	55 169	10 525
19	4 001	137 950	137 370	159 600	148 295	126 725	79 800	68 590	380	361	21 460	137 180	65 074	11 685
20	4 411	160 878	160 200	184 800	172 300	148 395	92 400	80 000	420	400	23 700	160 000	76 099	12 905

ЛИТЕРАТУРА

1. Баркан Д. Д. Динамика оснований и фундаментов. М., Стройвоенмориздат, 1948.
2. Бартоломей А. А. Экспериментальные исследования по определению осадок свайных фундаментов при однородном расположении свай. Сборник научных трудов Пермского политехнического института, 1964, № 16.
3. Бартошевич Э. С., Цейтлин А. И. О расчете конструкций, лежащих на упругом основании. «Строительная механика и расчет сооружений», 1965, № 4.
4. Беленя Е. И., Клепикова Л. В. Исследование совместной работы оснований, фундаментов и поперечных рам стальных каркасов промышленных зданий. М., Госстройиздат, 1957.
5. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. М., Гостехиздат, 1953.
6. Варвак П. М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Ч. I. Изд-во АН УССР, 1949.
7. Варвак П. М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Ч. II. Изд-во АН УССР, 1952.
8. Варвак П. М., Васильев В. В. Розрахунок залізобетонних заземлених та консольних балок-стінок. Збірник «Дослідження напруженого стану гідротехнічних споруд». Вид-во АН УРСР, 1961.
9. Варвак А. П. Расчет плит на упругом основании и сваях. «Строительство и архитектура», 1963, № 8.
10. Варвак О. П. Прямокутні плити на пружній основі змінної жорсткості. Доповіді АН УРСР, 1963, № 10.
11. Васильев Б. Д. Возведение капитальных зданий на сильно сжимаемых основаниях. М., — Л., Госстройиздат, 1952.
12. Васильев Б. Д. Основания и фундаменты. М., Госстройиздат, 1955.
13. Горбунов-Посадов М. И. Точный расчет фундаментов из перекрестных лент. «Проект и стандарт», 1935, № 5.
14. Горбунов-Посадов М. И. Расчет конструкций на упругом основании. М., Госстройиздат, 1953.
15. Дзугач М. И. Метод сеток в смешанной плоской задаче теории упругости. К., вид-во «Наукова думка», 1964.
16. Жемочкин Б. Н. Теория упругости. М., Госстройиздат, 1957.
17. Инструкция по применению универсальной программы расчета статически неопределимых стержневых систем методом деформаций (ДО). КиевЗНИИЭП, 1964.
18. Кадыйш Ф. С. Опытные исследования изгиба балок, лежащих на грунте. Сб. статей «Вопросы динамики и прочности». Рига, Изд-во АН Латв. ССР, 1962.

19. *Качурин В. К.* Приближенный расчет коротких балок на упругом основании методом конечных разностей. Труды Ленинградского инженерно-строительного института, вып 11, 1951.

20. *Киселев В. А.* Балки и рамы на упругом основании. М., Стройиздат, 1936.

21. *Клепиков С. Н.* Расчет балок на упругом основании при переменном коэффициенте постели. «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1965, № 5.

22. *Клепиков С. Н.* Расчет бескаркасных крупнопанельных зданий на неравномерные осадки оснований. К., изд-во «Гудивельник», 1966.

23. *Коваленко А. Ф.* Расчет рам методом распределения моментов. М., Госстройиздат, 1960.

24. *Кореньев Б. Г., Черниговская Е. И.* Расчет плит на упругом основании. М., Госстройиздат, 1962.

25. *Корневиц Э. Ф., Эндер Г. В.* Формулы для расчета балок на упругом основании. М., Госстройиздат, 1932.

26. *Кузнецов В. И.* Упругое основание. М., Госстройиздат, 1952.

27. *Лука А. А.* Осадки свайных фундаментов, работающих в условиях отсутствия кустового эффекта. Труды ЦНИИС, вып. 56., М., изд-во «Транспорт», 1965.

28. *Мангелов Л. И., Бартошевич Э. С.* О выборе расчетной модели упругого основания. «Строительная механика и расчет сооружений», 1961, № 4.

29. *Массальский Е. К.* Экспериментальное исследование работы гибкой балки на песчаном основании. «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1964, № 6.

30. *Массальский Е. К.* К расчету балок на грунтовом основании. Сб. «Проектирование фундаментов в промышленном строительстве». Обзорный выпуск 1 Главпроектстройпроекта Госстроя СССР, 1966.

31. Материалы по проектированию сложных фундаментов и оснований и по производству изысканий, 1964, № 5, М., ЦБТИ.

32. *Михеев В. В.* О совместной работе стены здания и ее основания. Сборник трудов № 34 НИИОПС «Механика грунтов». М., Госстройиздат, 1958.

33. *Морозова А. К.* Приближенный метод определения напряжений в балке-стенке на упругом основании. Сборник научных работ № 59 Белорусского политехнического института, 1959.

34. *Омадзе Г. В.* Расчет рам с учетом неравномерных осадок точечных фундаментов. Труды Грузинского политехнического института № 1 (86), 1963.

35. *Омадзе Г. В.* Расчет рам и ленточных фундаментов с учетом их совместной работы. Труды Грузинского политехнического института № 2 (95), 1964.

36. *Рабинович И. М.* Курс строительной механики. Ч. II, М., Госстройиздат, 1954.

37. *Савинов О. А.* Современные конструкции фундаментов под машины и их расчет. М., Стройиздат, 1964

38. СНиП II-Б 1-62. Основания зданий и сооружений. Нормы проектирования. М., Стройиздат, 1964.

39. *Соболев Д. Н.* Учет деформаций сдвига при расчетах крупнопанельных зданий на неоднородных основаниях. Сборник ЦНИИСК «Статические расчеты крупнопанельных зданий» М., Госстройиздат, 1963.

40. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Основания и фундаменты. М., Стройиздат, 1964.

41. Терцаги К., Пек Р. Механика грунтов в инженерной практике. М., Госстройиздат, 1958.

42. Тихенко Ю. Н. Распределение напряжений в высоких балках конечной длины, лежащих на упругом основании. Сб. № 2 ЦИСМ «Вопросы конструкций и теории сооружений». ГОНТИ, Харьков, 1938.

43. Трофименков Ю. Г. и др. Полевые методы исследований строительных свойств грунтов. М., Стройиздат, 1964.

44. Флорин В. А. Основы механики грунтов. Том I. М., Госстройиздат, 1959.

45. Цытович Н. А. Механика грунтов. М., Госстройиздат, 1963.

46. Цытович Н. А. Теория и практика фундаментостроения. М., Стройиздат, 1964.

47. Черкасов И. И. Механические свойства грунтовых оснований. М., Автотрансиздат, 1958.

48. Andermann F. Sciany, tarczowe narazone na działanie krzywizny niecki górniczej. «Inżynieria i budownictwo», 1962, № 6.

49. Cox L. H., Denke P. H. Stress distribution, instability, and free vibration of beam grid — works on elastic foundations. «Journal of the Aeronautical sciences», vol. 23, 1956, № 2.

50. Hansen E. Ausmittig belastete stützenfundamente. «Die Bautechnik», 1961, № 5.

51. Madyar A. Rahmenberechnung mit elastisch gelagerten Fundamenten «Die Bautechnik», 1959, № 12.

52. Opladen K. Zur Berechnung des Balkens auf elastischer Bettung bei veränderlicher Bettungszahl und veränderlicher Biegesteifheit. «Die Bautechnik» 1960, № 11.

Предисловие	3
Глава I. Коэффициенты жесткостей естественных и искусственных оснований сооружений	7
Винклерова модель основания	7
Определение коэффициента жесткости основания методом пробных нагрузок	11
Расчетно-теоретический метод определения коэффициента жесткости основания	15
Табличный метод определения коэффициента жесткости	21
Коэффициенты жесткости при повороте и сдвиге фундамента	22
Коэффициенты жесткости свайных оснований	26
Глава II. Изгиб балок на упругом основании	33
Методы расчета	33
Балка постоянной по длине жесткости на основании переменной жесткости	41
Балка постоянной жесткости на упругом основании постоянной жесткости	54
Балка переменной жесткости и другие случаи расчета балок	74
Примеры расчета	79
Глава III. Кручение балок	91
Общие сведения	91
Метод расчета	93
Формулы коэффициентов и свободных членов расчетных уравнений	99
Пример расчета	105
Глава IV. Системы перекрестных балок	107
Общие сведения	107
Уточненный расчет системы перекрестных балок	110
Приближенные методы расчета	117
Глава V. Рамные конструкции	123
Общие сведения	123
Расчетная модель упругой опоры рамы	125
Расчет рам на отдельных фундаментах	129
Расчет рам на сплошных фундаментах	133
Влияние податливости основания на напряженное состояние многостажных рам	135
Глава VI. Балки-стенки	144
Общие сведения	144
Определение реакций основания	146
Определение напряжений в балке-стенке	150
Случай симметричной самоуравновешенной нагрузки	154

<i>Глава VII. Плиты</i>	163
Общие сведения	163
Формулы внеконтурных неизвестных	164
Составление расчетных уравнений	168
Алгоритм расчета прямоугольных плит	170
Расчет круглых плит	175
Пример расчета	176
Приложение	179
Литература	180

Сергей Николаевич Клепиков

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Редактор *З. Н. Волощенко*
 Обложка художника *Г. М. Саенко*
 Художественные редакторы *В. В. Красий, В. Е. Береговая*
 Технический редактор *А. А. Сегафин*
 Корректор *Л. П. Стицарь*

БФ 65970. Сдано в набор 3/XII—1966 г. Подписано к печати 24/IV—1967 г.
 Бумага типографская № 1 60×90¹/₁₆—5,75 бум листов. Усл. печ. 11,5.
 Уч.-изд.л. 11,1 Тираж 5000. Цена 69 коп. Зак. 1031.

Издательство «Будивельник», Киев, Владимирская, 24.

Отпечатано с матриц фабрики набора в Киевской книжной
 типографии № 6, Киев, Выборгская, 84.