

B1	B2	B3	B4	B5	B6
6	18	-13	6	58500	9
B7	B8	B9	B10	B11	B12
2,5	0,25	36	35	4	12

C1 Решите систему

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

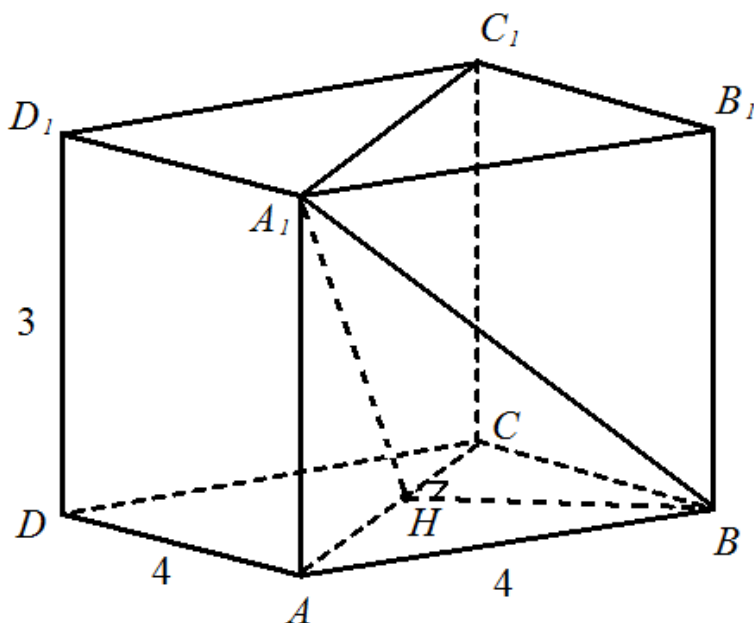
Из второго уравнения находим: $\sin^2 x - \sin^2 y = 0$. Учитывая, что $\sin x - \sin y = 1$, получаем систему:

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin x + \sin y = 0; \end{cases} \begin{cases} 2 \sin x = 1, \\ 2 \sin y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $((-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi), n \in Z, k \in Z$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостью $AA_1 C$ и прямой $A_1 B$, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.

Из точки B проведем перпендикуляр BH к AC . $A_1 H$ – проекция $A_1 B$ на плоскость $AA_1 C$. Значит, нужно найти угол $BA_1 H$.



В прямоугольном треугольнике ABC находим: $BH = 2\sqrt{2}$.

В прямоугольном треугольнике A_1AB находим: $A_1B = 5$.

В прямоугольном треугольнике A_1HB находим: $\sin A_1 = \frac{BH}{A_1B} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

C3

Решите уравнение $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4$.

Сделаем замену переменной: $y = \sqrt{x-4}$. Получаем:
 $\sqrt{y^2+4y+4} + \sqrt{y^2-4y+4} = 4$; $|y+2| + |y-2| = 4$.

Учитывая, что $y \geq 0$ и поэтому $y+4 > 0$, получаем:

$$y+2+|y-2|=4; |y-2|=2-y.$$

Воспользуемся определением модуля. Получаем: $y-2 \leq 0$;
 $0 \leq \sqrt{x-4} \leq 2$; $4 \leq x \leq 8$.

Ответ: $x \in [4; 8]$.

C4

В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F . Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF .

Возьмем точку K на AB так, что $DK \parallel EC$. Если $BK = x$, то $KE = 2x$ и $EA = EB = 3x$. Значит, $S_{AEF} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 S_{AED} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} S_{ABD} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{10} S_{ABC}$.

Ответ: 0,1.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$.

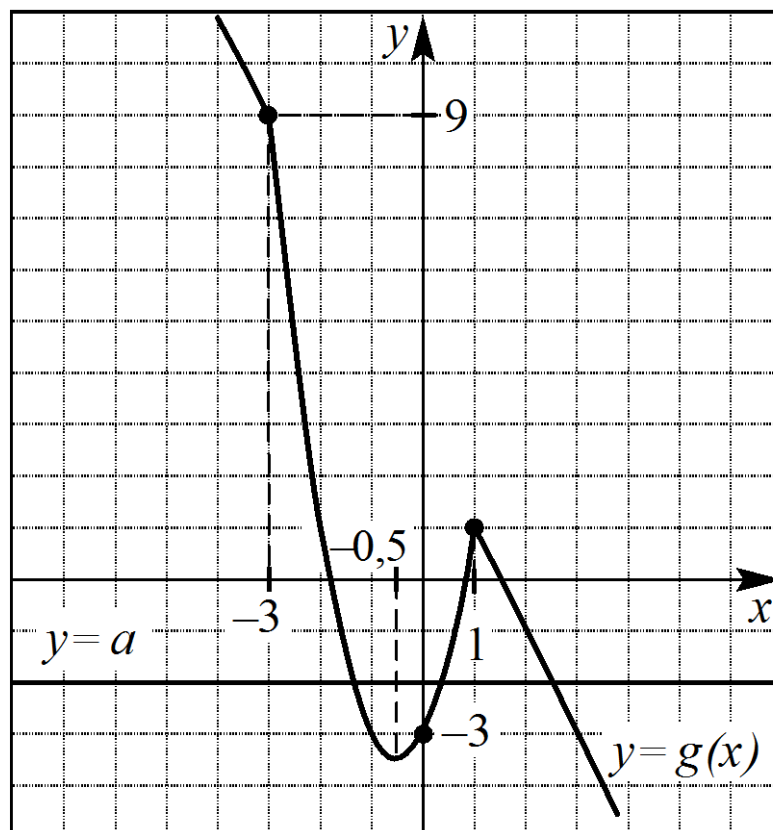


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех или более точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет более двух различных корней.

Если $x \leq -3$ или $x \geq 1$, то $|x^2 + 2x - 3| = x^2 + 2x - 3$, и $g(x) = -2x + 3$.

Если $-3 < x < 1$, то $|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3$, и $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет более двух корней, только если $g(-\frac{1}{2}) < a < g(1)$.

$$g(-\frac{1}{2}) = -3,5; g(1) = 1.$$

Ответ: $-3,5 < a < 1$.

C6

Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

При любом k число $3^{2k} + 1$ дает остаток 2, а число $3^{2k-1} + 1$ – остаток 4 при делении на 8. Значит, $3^n + 1 = 2^m$, только если $m = 1$ или $m = 2$ (если $m \geq 3$, то 2^m делится на 8 без остатка).

Если $m = 1$, то получаем уравнение $3^n = 1$, решением которого является не натуральное число 0.

Если $m = 2$, то получаем уравнение $3^n = 3$, которое имеет натуральное решение $n = 1$.

Ответ: $m = 2, n = 1$.