B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
13	2	-4	9	14000	10,5
B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
1,5	-0,5	54	40	-3	4

C1 Решите систему

$$\begin{cases}(2x^2-5x-3)\sqrt{\cos y}=0,\\ \sin y = x.\end{cases}$$

Если $\cos y = 0$, то $y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$, при этом из второго уравнения следует, что $x=(-1)^k$.

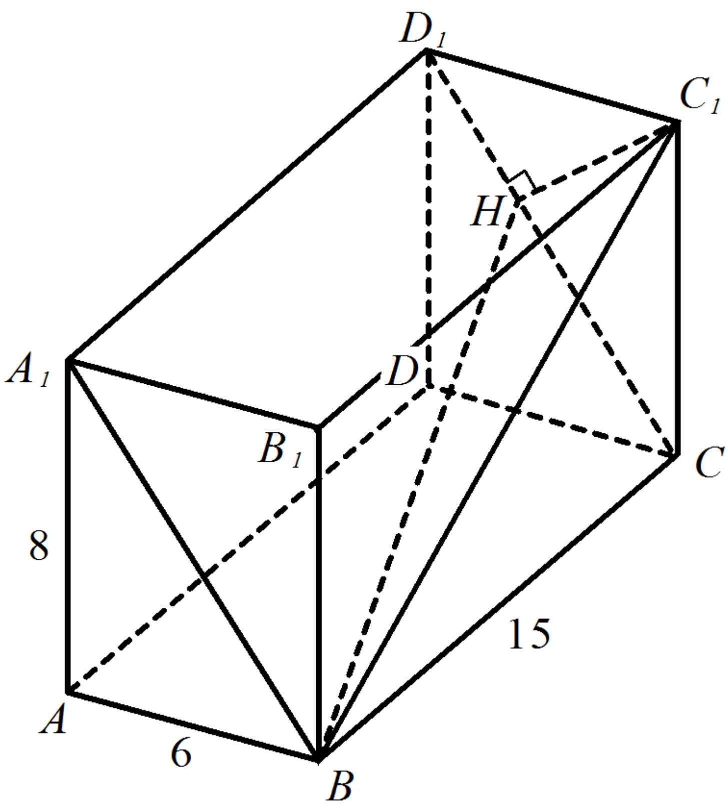
Если $\cos y>0$, то из первого уравнения находим: $x=3$ или $x=-\dfrac{1}{2}$.

При $x=3$ второе уравнение не имеет решений, а при $x=-\dfrac{1}{2}$, учитывая условие $\cos y>0$, получаем: $y=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $((-1)^k;\dfrac{\pi}{2}+\pi k),\ (-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k),\ k\in Z$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1=8$, $AB=6$, $BC=15$.

Сечение плоскостью A_1BC есть прямоугольник A_1BCD_1.



Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1H к CD_1. BH – проекция BC_1 на плоскость A_1BC. Значит, нужно найти угол C_1BH.

В прямоугольном треугольнике D_1C_1C находим: $C_1H = \dfrac{D_1C_1 \cdot C_1C}{D_1C} = \dfrac{24}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BCC_1 находим: $BC_1 = 17$.

В прямоугольном треугольнике C_1HB находим: $\sin B = \dfrac{C_1H}{BC_1} = \dfrac{24}{85}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{24}{85}$.

C3 Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$.

Сделаем замену переменной: $y = \sqrt{x-1}$. Получаем:

$\sqrt{y^2+2y+1} - \sqrt{y^2-2y+1} = 2$; $|y+1| - |y-1| = 2$.

Учитывая, что $y \ge 0$ и поэтому $y+1 > 0$ Преобразуем уравнение: $y+1 - |y-1| = 2$; $|y-1| = y-1$.

Воспользуемся определением модуля. Получаем: $y-1 \ge 0$; $\sqrt{x-1} \ge 1$; $x \ge 2$.

Ответ: $x \ge 2$.

C4 В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найдите длину отрезка DE, если $AC=6$, $AE=2$, $CD=3$.

Обозначим $BD=y,\ BE=z$. Тогда по свойству биссектрисы: $\frac{3+y}{6}=\frac{z}{2}$ и $\frac{z+2}{6}=\frac{y}{3}$, откуда $\begin{cases} y+3=3z, \\ z+2=2y; \end{cases}$ $z=1{,}6;\ y=1{,}8$,

$AB=3{,}6,\ BC=4{,}8$.

$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{3{,}6^2+4{,}8^2-6^2}{2\cdot 3{,}6\cdot 4{,}8}=0$. Значит, $\angle B=90^\circ$.

Тогда $ED^2=y^2+z^2=1{,}6^2+1{,}8^2=5{,}8$.

Ответ: $\sqrt{5{,}8}$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4|$.

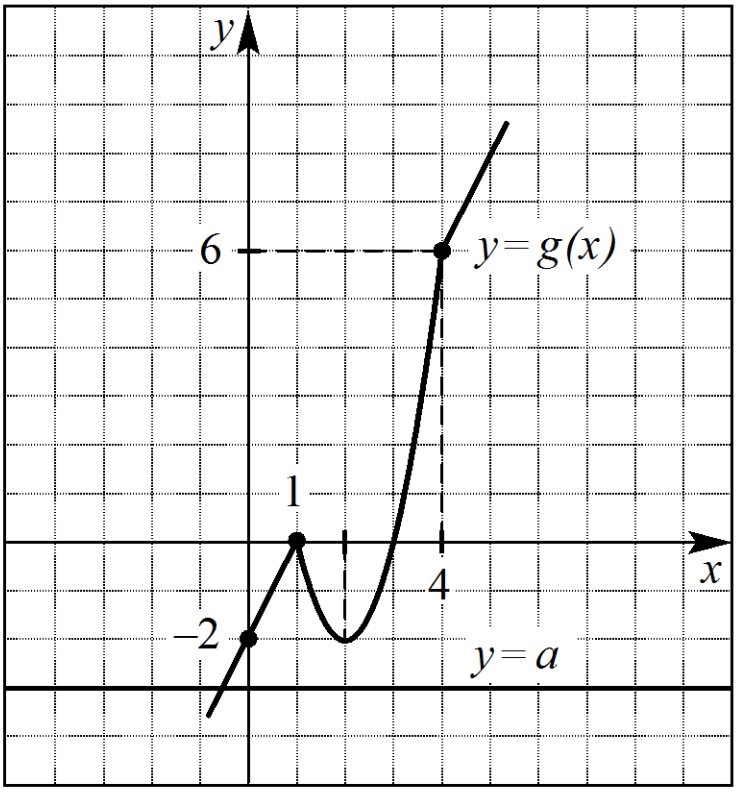


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух или менее точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех различных корней.

Если $x \le 1$ или $x \ge 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + 4$, и $g(x) = 2x - 2$.

Если $1 < x < 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = -x^2 + 5x - 4$, и $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех корней, только если $a \le g(2)$ или $a \ge g(1)$.

$g(2) = -2$; $g(1) = 0$.

Ответ: $a \le -2$, $a \ge 0$.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

Пусть n – четное число $n = 2k$. Тогда $2^m = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$, откуда $k = 1$, и $n = 2$. При этом $2^m = 8$, следовательно, $m = 3$.

Пусть теперь n – нечетное число. Все нечетные степени тройки $(3, 27, 243, ...)$ делятся на 4 с остатком 3. Значит, $3^n - 1$ делится на 4 с остатком 2. Из равенства $2^m = 3^n - 1$ получаем, что в этом случае $m = 1$ (если $m \geq 2$, то 2^m делится на 4 без остатка). При этом $3^n - 1 = 2$, откуда $n = 1$.

Ответ: $m = 3$, $n = 2$ или $m = n = 1$.