B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
865	7	9,5	10	117600	11
B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
1,5	0,5	40	3520	6	75

C1 Решите систему

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

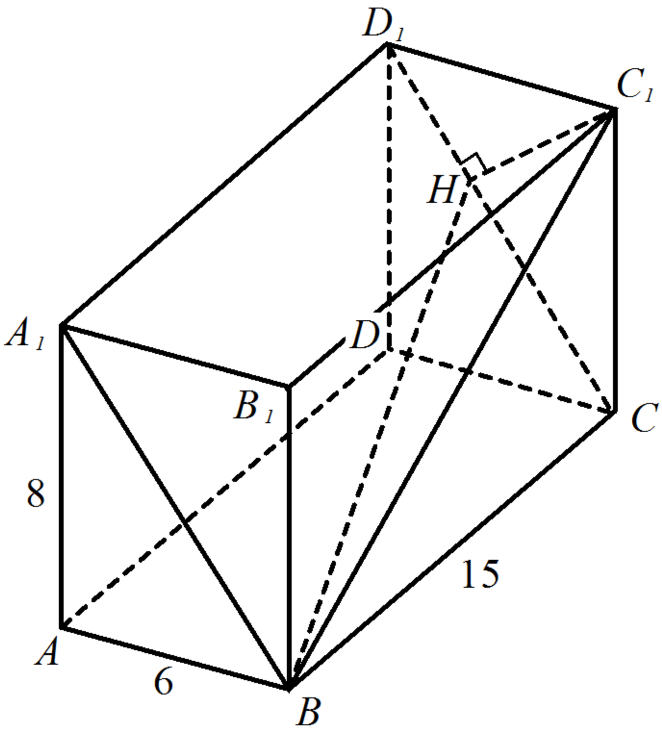
Из второго уравнения находим: $\sin^2 x - \sin^2 y = 0$. Учитывая, что $\sin x - \sin y = 1$, получаем систему:

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin x + \sin y = 0; \end{cases} \begin{cases} 2\sin x = 1, \\ 2\sin y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $((-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi),\ n \in Z, k \in Z$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

Сечение плоскостью A_1BC есть прямоугольник A_1BCD_1.



Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1H к CD_1. BH – проекция BC_1 на плоскость A_1BC. Значит, нужно найти угол C_1BH.

В прямоугольном треугольнике D_1C_1C находим: $C_1H = \dfrac{D_1C_1 \cdot C_1C}{D_1C} = \dfrac{24}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BCC_1 находим: $BC_1 = 17$.

В прямоугольном треугольнике C_1HB находим: $\sin B = \dfrac{C_1H}{BC_1} = \dfrac{24}{85}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{24}{85}$.

C3 Решите уравнение $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4$.

Сделаем замену переменной: $y = \sqrt{x-4}$.

Получаем: $\sqrt{y^2+4y+4} + \sqrt{y^2-4y+4} = 4$; $|y+2| + |y-2| = 4$.

Учитывая, что $y \ge 0$ и поэтому $y+4>0$, получаем:

$$y+2+|y-2|=4;\ \ |y-2|=2-y.$$

Воспользуемся определением модуля.

Получаем: $y-2 \le 0; 0 \le \sqrt{x-4} \le 2;\ 4 \le x \le 8$.

Ответ: $x \in [4;8]$.

C4 В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найдите длину отрезка DE, если $AC=6$, $AE=2$, $CD=3$.

Обозначим $BD = y,\ BE = z$. Тогда по свойству биссектрисы: $\dfrac{3+y}{6} = \dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{z+2}{6} = \dfrac{y}{3}$, откуда $\begin{cases} y+3=3z, \\ z+2=2y; \end{cases}$ $z=1{,}6;\ y=1{,}8$,

$AB = 3{,}6,\ BC = 4{,}8$.

$\cos B = \dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC} = \dfrac{3{,}6^2+4{,}8^2-6^2}{2\cdot 3{,}6\cdot 4{,}8} = 0$. Значит, $\angle B = 90^\circ$.

Тогда $ED^2 = y^2+z^2 = 1{,}6^2+1{,}8^2 = 5{,}8$.

Ответ: $\sqrt{5{,}8}$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$.

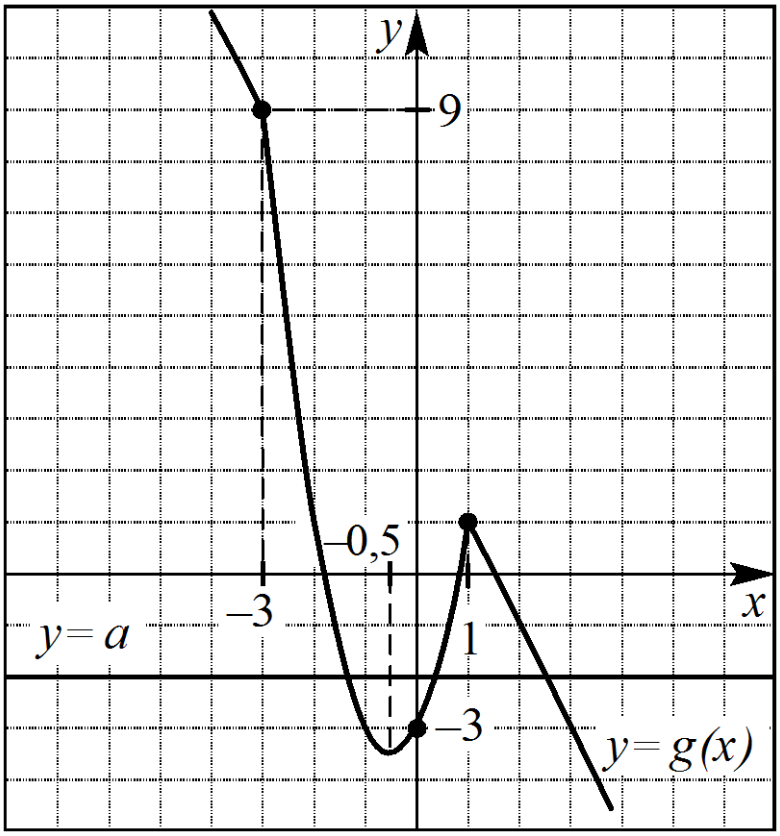


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех или более точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет более двух различных корней.

Если $x \le -3$ или $x \ge 1$, то $|x^2 + 2x - 3| = x^2 + 2x - 3$, и $g(x) = -2x + 3$.

Если $-3 < x < 1$, то $|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3$, и $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет более двух корней, только если $g(-\frac{1}{2}) < a < g(1)$.

$g(-\frac{1}{2}) = -3,5$; $g(1) = 1$.

Ответ: $-3,5 < a < 1$.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

Пусть n – четное число $n = 2k$. Тогда $2^m = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$, откуда $k = 1$, и $n = 2$. При этом $2^m = 8$, следовательно, $m = 3$.

Пусть теперь n – нечетное число. Все нечетные степени тройки $(3, 27, 243, ...)$ делятся на 4 с остатком 3. Значит, $3^n - 1$ делится на 4 с остатком 2. Из равенства $2^m = 3^n - 1$ получаем, что в этом случае $m = 1$ (если $m \geq 2$, то 2^m делится на 4 без остатка). При этом $3^n - 1 = 2$, откуда $n = 1$.

Ответ: $m = 3, n = 2$ или $m = n = 1$.