МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. І.ФРАНКА

О.О.ЛОГВИНЕНКО, Я.А.ПАСТИРСЬКИЙ

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА
ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ З МЕХАНІКИ

для студентів університету

Рекомендовано до друку
кафедрою загальної фізики
Протокол N 2
від 10 жовтня 1994 р.

ЛЬВІВ ЛДУ 1996

Логвиненко О. О., Пастирський Я. А. Загальна фізика: лабораторний практикум з механіки для студентів університету. - Львів: Ред. видав. відд. Львів. держ. ун-ту, 1995. - 113 с.

У лабораторному практикумі розглянуто основні методи вимірювання фізичних величин, класифікацію похибок вимірювання і обробку результатів прямих вимірювань. Описано лабораторні роботи до всіх розділів механіки. Основну увагу приділено принципам і методам вивчення фізичних явищ, техніці виконання лабораторних робіт, оцінці точності експерименту.

Для студентів університету.

Рисунки Галини Тарасівни Йост

Рецензенти: Миколайчук О. Г., канд. фіз.-мат. наук, проф.,
Павлик Б. В., канд. фіз.-мат. наук, доц.

Редактор М. М. Мартиняк

© О. О. Логвиненко,
Я. А. Пастирський,
1995

Загальний фізичний практикум призначений для ознайомлення студентів з експериментальними основами фундаментальних фізичних законів і явищ, вироблення ними навичок самостійного виконання експерименту. Основні завдання практикуму такі:

навчити користуватися теоретичним матеріалом для аналізу конкретних фізичних ситуацій, експериментально вивчати основні фізичні закономірності, визначати точність і ступінь достовірності отримуваних результатів;

ознайомити з сучасними приладами, з принципами їхньої дії, дати загальні відомості про галузі застосування;

дати практичні навики користування вимірювальною апаратурою й експериментальними установками.

Лабораторний практикум допоможе студентам університету виконувати лабораторні роботи з механіки. До кожної лабораторної роботи перелічено завдання, які студент повинен виконати під час заняття; приладдя, потрібне для роботи; питання, що їх студенти повинні засвоїти, щоб виконати роботу (з посиланням на доступні посібники); описано установки; виведено робочі формули; наведено порядок виконання роботи; контрольні запитання для перевірки самопідготовки студентів до виконання роботи; обов"язкові питання, які треба з"ясувати у звіті до виконаної роботи.

Студентам для самопідготовки до виконання лабораторних робіт рекомендуємо такий список літератури (до кожної лабораторної роботи наведено номер праці та потрібні параграфи)

1. Матвеев О. М. Механіка і теорія відносності, К., 1993.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики: В 3 т. Т. 1. Механика. М., 1989.
3. Іванків Л. І., Палюх Б. М. Короткий курс механіки: У 2 ч. Ч. 1. Львів, 1992.
4. Іванків Л. І., Палюх Б. М. Короткий курс механіки: У 2 ч. Ч 2. Львів, 1992.
5. Стрелков С. П. Механика. М., 1975.
6. Савельев И. В. Курс общей физики: В 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. М., 1987.
7. Иродов И. Е. Основные законы механики. М., 1985.

Крім запропонованих посібників для самопідготовки рекомендуємо користуватися конспектом лекцій, а також літературою, запропонованою лектором.

Для визначення похибок фізичних величин радимо використовувати "Методичні вказівки до обробки експериментальних результатів у фізичному лабораторному практикумі", Львів:ЛДУ, 1981 (укладач О. Б. Кушнір).

У лабораторному практикумі описано лабораторні роботи, які охоплюють основні розділи механіки, а саме: сили пружності та тертя (роботи 118, 120, 120А, 127); динаміку обертального руху твердого тіла (роботи 111, 113, 116, 121, 123, 123А); закони збереження (роботи 114, 124, 128, 129); коливання та хвилі (роботи 115, 117, 122, 125).

Нижче наведено список лабораторних робіт:

101. Визначення густини тіл правильної геометричної форми.
111. Вивчення обертального руху на маятнику Обербека.
113. Дослідження залежності моменту інерції дволанкової системи від її геометричних розмірів.
114. Дослідна перевірка закону збереження моменту імпульсу.
115. Визначення прискорення вільного падіння за допомогою фізичного маятника.
116. Дослідна перевірка теореми Гюйгенса-Штейнера.
117. Дослідження коливань маятника з рухомою точкою підвісу.
118. Дослідження процесу пружної деформації розтягу дротини.
120. Визначення модуля зсуву динамічним методом.
120А. Дослідження процесу пружної деформації кручення.
121. Перевірка теореми Гюйгенса-Штейнера за допомогою трифілярного підвісу.
122. Вивчення коливних процесів.
123. Вивчення закономірностей руху гіроскопа.
123А. Дослідження прецесії гіроскопа та визначення його моменту інерції.
124. Визначення швидкості польоту кулі балістичним методом.
125. Визначення швидкості звуку в повітрі методом стоячої хвилі
127. Визначення коефіцієнта тертя кочення.
128. Дослідна перевірка рівняння Бернуллі.
129. Визначення швидкості польоту кулі за допомогою крутильно-балістичного маятника.

1. Математична обробка результатів фізичних вимірювань

Сьогодні значно підвищилися вимоги до точності вимірювань у всіх галузях природничих наук і виробництва. Точність вимірювання безпосередньо пов"язана з оцінкою похибок засобів вимірювання і результатів досліду. Правильна оцінка результатів вимірювань безпосередньо залежить від правильної обробки результатів спостережень. Неохайна обробка може призвести до втрати цінної інформації та до хибних висновків.

У фізичних практикумах студенти університету вже з першого семестру вимірюють різні фізичні величини. Правильний висновок з кожного вимірювання можливий лише за умови ретельного аналізу методики експерименту і статистичної обробки отриманих даних. Це детально описано в "Методичних вказівках до обробки експериментальних результатів у фізичному лабораторному практикумі для студентів 1 курсу фізичного факультету" (Львів: ЛДУ, 1981; укладач О. Б. Кушнір). Засвоєння цього матеріалу дасть змогу успішно виконати лабораторні роботи. Нижче конспективно викладено деякі розділи цих методичних вказівок, потрібні на початковій стадії роботи студентів у лабораторії.

Поняття вимірювання і типи похибок. Кожна з лабораторних робіт фізичного практикуму присвячена вивченню конкретного фізичного явища, вимірюванню тієї чи іншої величини, що характеризує явище або властивість тіла, відтворенню дослідів для перевірки основних фізичних законів. Звичайно кожне таке дослідження складається з декількох вимірювань.

Під *вимірюванням* розуміють виявлення значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів. *Фізична величина* - це властивість, якісно загальна для багатьох фізичних об"єктів (фізичних систем, їхніх станів і процесів, які в них відбуваються), але кількісно індивідуальна для кожного об"єкта. Фізичними величинами є довжина, маса, час, швидкість тощо. Кількісна оцінка фізичної величини називається *розміром фізичної величини*. *Значення фізичної величини* - це оцінка фізичної величини у вигляді деякого числа прийнятих для неї одиниць. Саме число, яке входить у значення фізичної величини, називається *чисельним значенням фізичної величини*. Отже, вимірювання фізичної величини - це експериментальний процес, під час якого шляхом порівняння визначають у скільки разів

фізична величина більша або менша від однорідної величини, прийнятої за одиницю. Вимірювання складається зі спостережень і математичної обробки їхніх результатів.

Спостереження під час вимірювання – це експериментальна операція, у результаті якої отримують одне значення з групи значень величини, які підлягають сумісній обробці для отримання результату вимірювання. Залежно від способу отримання результатів вимірювання їх розділяють на прямі, посередні, сукупні й сумісні.

Прямі вимірювання – це такі, при яких шукане значення фізичної величини визначають безпосередньо з дослідних даних.

Посередні – це вимірювання, при яких шукане значення величини визначають на підставі відомої залежності між цією величиною і величинами, що підлягають прямим вимірюванням.

Сукупні – це одночасні вимірювання декількох однойменних значень величин, при яких шукане значення величини визначають за допомогою розв"язування системи рівнянь, отриманих унаслідок прямих вимірювань різних сполучень цих величин.

Сумісні – це вимірювання двох або декількох однойменних значень величин, що їх виконують одночасно для визначення залежностей між ними.

Під час аналізу вимірювань слід чітко розмежовувати два поняття: істинне значення фізичних величин та їхні емпіричні прояви – результати вимірювань.

Істинне значення фізичної величини – це значення, яке ідеальним чином якісно і кількісно відображає відповідну властивість об"єкта. Воно не залежить від засобів нашого пізнання і виявляється тією абсолютною істиною, до якої ми прагнемо, намагаючись виразити його у вигляді числового значення.

Результати вимірювань, навпаки, є продуктом нашого пізнання, наближені оцінки значень величин, визначені шляхом спостережень. Вони залежать не тільки від самих величин, але й від методів вимірювання, технічних засобів, за допомогою яких їх вимірюють, та властивостей органів відчуття спостерігача, який виконує вимірювання.

Через недосконалість засобів вимірювання, а також через численні збурення отримане під час вимірювань значення фізичної величини X відрізняється звичайно від його істинного значення X_0, тобто має похибку.

Похибка вимірювання – це відхилення результату вимірювання від істинного значення вимірюваної величини. Похибка $\Delta X = X - X_0$, вира-

жена в одиницях вимірюваної фізичної величини, називається *абсолютною*, а виражена в частинах або відсотках від значення вимірюваної фізичної величини – *відносною*.

Оскільки істинне значення X_0 вимірюваної величини невідоме, то невідомі й похибки вимірювання. Щоб отримати хоча б наближені результати, доводиться замість істинного значення підставляти так звane *дійсне значення*, тобто значення, визначене експериментально, яке наближається до істинного настільки, що для цієї мети його можна використати замість нього.

Залежно від закономірності появи похибки вимірювання бувають трьох типів: грубі, систематичні й випадкові.

Грубою похибкою, або промахом, називають похибку вимірювання, яка суттєво перевищує очікувану за цих умов вимірювання.

Систематична похибка вимірювання – це складова похибки вимірювання, яка залишається сталою або закономірно змінюється під час повторних вимірювань одної і тої ж величини.

Випадковою похибкою вимірювання називають складову похибки, яка змінюється випадковим чином під час повторних вимірювань одної і тої ж величини.

Закономірності випадкових похибок вивчені, існують прийоми їхніх оцінок. Їх виявляють шляхом багаторазових вимірювань. Систематичні ж похибки не можна ні виявити, ні усунути під час повторних вимірювань тим же приладом.

Поява тієї чи іншої випадкової похибки є так званою випадковою подією. *Випадковими подіями* називають такі події, появу яких не можна точно передбачити. Їх вивчає теорія ймовірностей, що дає методи обчислення ймовірності їхньої появи.

Теорія похибок, яка грунтується на теорії ймовірностей, дає формули для обчислення ймовірностей появи того чи іншого значення випадкової похибки ΔX в ряду n однакових обстежень величини X.

2. Обробка результатів прямих вимірювань

Завдання прямого вимірювання полягає у визначенні середнього значення шуканої величини з урахуванням поправки на систематичну похибку, а також в обчисленні випадкової похибки, похибки приладу і заокруглення.

Визначення довірчого інтервалу. Нехай у результаті i-го спостереження величини X_0 отримано значення X_i. Якщо таких спостережень було n, то вся сукупність значень X_i називається

вибіркою об"єму n. Під дійсним значенням вимірюваної величини в цьому випадку розуміють *середнє арифметичне значення вибірки*

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} . \qquad (1)$$

Випадковим відхиленням результату i-го спостереження від середнього буде

$$\Delta X_i = X_i - \bar{X} . \qquad (2)$$

Знаючи величину випадкових відхилень кількох спостережень, легко обчислити *вибіркове середнє квадратичне відхилення результату* спостереження (оцінка середнього квадратичного відхилення)

$$S_x = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta X_i)^2}{n-1}\right]^{1/2} . \qquad (3)$$

Кінцевою метою обробки деяких вимірювань є одержання найвірогіднішого результату вимірювання (середнє вибіркове) і оцінка його похибки. Похибку результату вимірювання характеризує величина, яка називається *вибірковим середнім квадратичним відхиленням середнього арифметичного* (або оцінкою середнього квадратичного відхилення середнього арифметичного)

$$S_{\bar{x}} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta X_i)^2}{n(n-1)}\right]^{1/2} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} . \qquad (4)$$

Ця величина характеризує розподіл середніх значень $\bar{X}$, отриманих у різних вибірках.

Визначаючи границі довірчого інтервалу (інтервалу, в який потрапляє вимірювана величина з заданою ймовірністю), для $\bar{X}$ при малих значеннях n (при $n < 30$) використовують закон розподілу випадкових похибок, запропонований Стьюдентом. Для цього спочатку треба визначити $\bar{X}$ і $S_{\bar{x}}$, а потім вибрати потрібну довірчу ймовірність P

Таблиця 1

Коефіцієнти Стьюдента t_{pn}

n	Довірча ймовірність						
	0,5	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,999
2	1,00	3,1	6,31	12,71	31,82	63,66	636,62
3	0,82	1,9	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
4	0,77	1,6	2,35	3,18	4,54	5,84	12,92
5	0,74	1,5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
6	0,73	1,5	2,02	2,57	3,37	4,03	6,87
7	0,72	1,4	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
8	0,71	1,4	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41
9	0,71	1,4	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
10	0,70	1,4	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
11	0,70	1,4	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
12	0,70	1,4	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
13	0,70	1,4	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
14	0,69	1,4	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
15	0,69	1,3	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
16	0,69	1,3	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
17	0,69	1,3	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
18	0,69	1,3	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
19	0,69	1,3	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
20	0,69	1,3	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
25	0,69	1,3	1,71	2,06	2,49	2,80	3,75
30	0,68	1,3	1,70	2,04	2,46	2,76	3,66
40	0,68	1,3	1,68	2,02	2,42	2,70	3,55
60	0,68	1,3	1,67	2,00	2,39	2,66	3,46
120	0,68	1,3	1,66	1,98	2,36	2,62	3,37
∞	0,67	1,3	1,65	1,96	2,33	2,58	3,29

(відносну кількість відхилень, величина яких не перевищує за абсолютним значенням заданої величини $|\Delta X_1|$) результату і за відповідною таблицею коефіцієнтів Стьюдента (табл. 1) залежно від кількості проведених спостережень n визначають коефіцієнт Стьюдента

$$t_{pn} = \overset{o}{\Delta X}/S_{\bar{x}} . \qquad (5)$$

Знаючи $S_{\bar{x}}$ і t_{pn}, обчислюють випадкову похибку результату

вимірювання (довірчу границю) $\overset{\circ}{\Delta X}$:

$$\overset{\circ}{\Delta X} = t_{pn} S_{\bar{x}} . \qquad (6)$$

Потрібно звернути увагу на те, що обчислена таким чином похибка $\overset{\circ}{\Delta X}$ є випадковою похибкою результату вимірювання.

Похибка приладу. *Похибку приладу* визначають під час його випробування або перевірки, яку виконують метрологічні служби.

Граничну похибку приладу (максимально допустима похибка, яку дає прилад під час вимірювання в нормальних умовах) $\theta_{гр}$ обчислюють за класом точності, який вказують у його паспорті або на шкалі приладу (*класом точності* k вимірювального приладу називається виражене у відсотках відношення граничної абсолютної похибки $\theta_{гр}$ до максимального значення X_m, яке цей прилад може виміряти: $k = \frac{\theta_{гр}}{X_m} 100\%$). Тоді граничну похибку приладу можна визначити за формулою

$$\theta_{гр} = kX_m/100 . \qquad (7)$$

Потрібно зважати, що гранична похибка, або клас точності приладу, стосується не конкретного екземпляра, а всієї сукупності цієї серії приладів. Про похибку окремого екземпляра можна лише сказати, що вона не виходить за межі, визначені граничною похибкою, або класом точності. Тому, незважаючи на те, що похибка приладу є систематичною, її можна враховувати під час обчислень як випадкову (розподілену за рівномірним законом від $-\theta$ до $+\theta$).

Граничні похибки штангенциркулів, мікрометрів і деяких інших приладів іноді нанесені на самому приладі, іноді вказані в паспорті.

Якщо гранична похибка, або клас точності приладу, невідомий, то приймають, що *гранична похибка* $\theta_{гр}$ *дорівнює* 0,5 *ціни поділки шкали* (ціна поділки шкали – це різниця значень, яка відповідає двом сусіднім позначкам шкали).

Знаючи граничну похибку приладу $\theta_{гр}$, обчислюємо вибіркове середнє квадратичне відхилення результату вимірювання

$$S_{пр} = \theta_{гр}/3 . \qquad (8)$$

Тоді для довірчої ймовірності P абсолютну похибку приладу можна обчислити за формулою

$$\Delta_{пр} X = t_P S_{пр} = t_P \theta_{гр}/3 , \qquad (9)$$

де t_P – коефіцієнт, який беремо з табл. 2.

Зазначимо, що фактична похибка *будь-якого* приладу може бути меншою, ніж це випливає з формули (9), і її можна врахувати конкретно, якщо є крива градуювання приладу або взірцевий прилад.

Таблиця 2

Довірча ймовірність P для довірчого інтервалу, вираженого в частках середнього квадратичного відхилення $t_P = \Delta X/\sigma$

t_P	P	t_P	P	t_P	P
0,1	0,07966	1,6	0,89040	2,8	0,99489
0,5	38292	2,0	95450	3,0	99730
0,7	51607	2,2	97219	3,5	99953
1,0	68269	2,4	98360	4,0	99994
1,3	0,80640	2,6	0,99068	4,5	0,999994

Похибка заокруглення. У тих випадках, коли відліки показів приладу заокруглюють до цілих значень або часток поділок (лінійка, мікрометр, електровимірювальний прилад тощо), а також під час користування ноніусом або цифровими приладами, виникає випадкова похибка (похибка заокруглення), яка має звичайно рівномірний розподіл. При цьому якщо немає систематичних похибок, то максимальна похибка не перевищує $h/2$, де h називається *інтервалом заокруглення*. Інтервал заокруглення h може дорівнювати ціні *поділки* приладу, якщо відлік беруть з точністю до цілих поділок, половині ціни поділки, якщо відліки заокруглюють до половини поділки і т.д.

Абсолютною похибкою заокруглення називають величину

$$\Delta_з X = P \frac{h}{2} . \qquad (10)$$

Під час виконання лабораторних робіт треба враховувати три типи похибок: випадкову $\overset{o}{\Delta X}$, похибку приладу $\Delta_{пр}X$ і похибку заокруглення $\Delta_з X$. Сумарну похибку досліду визначають "квадратичним сумуванням":

$$\Delta X = \sqrt{(\overset{o}{\Delta X})^2+(\Delta_{пр}X)^2+(\Delta_з X)^2} \quad . \qquad (11)$$

Для оцінки точності вимірювань вводять поняття *відносної* похибки δX:

$$\delta X = \Delta X/\bar{X} \quad . \qquad (12)$$

Під час обчислення сумарної похибки за формулою (11) можна нехтувати будь-якою з окремих похибок $\overset{o}{\Delta}$, $\Delta_{пр}$, $\Delta_з$, якщо її значення у *три рази менше* від будь-якої іншої похибки.

У випадку вимірювання, під час якого виконують тільки одне спостереження (наприклад, вимірювання температури, зважування тіла на технічній вазі та ін.), сумарну похибку оцінюють похибкою приладу і заокруглення.

Одноразовим спостереженням обмежуються і тоді, коли три-чотири попередні досліди свідчать, що випадкова похибка не виявляється (при повторних спостереженнях отримуються один і той же результат). Це трапляється тоді, коли випадкова похибка є нижче порогу чутливості приладу. У цьому випадку теж обчислюють тільки $\Delta_{пр}X$ і $\Delta_з X$.

Що стосується похибок посередніх вимірювань, то формули для їх обчислення наведені у формі звіту до кожної лабораторної роботи. Слід пам"ятати, що в робочі формули підставляють середні значення величин, одержані під час прямих вимірювань.

Лабораторна робота 101. ВИЗНАЧЕННЯ ГУСТИНИ ТІЛ ПРАВИЛЬНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФОРМИ

Завдання: ознайомитися з будовою та правилами вимірювання лінійних розмірів тіл штангенциркулем і мікрометром; виміряти лінійні розміри тіла правильної геометричної форми та визначити його масу. Обчислити густину тіла; оцінити точність експерименту.

Приладдя: штангенциркуль; мікрометр; аналітична вага з набором важків; тіло правильної геометричної форми (паралелепіпед, циліндр тощо).

Теоретичний матеріал: нониус; абсолютна та відносна похибки вимірювань; правила користування штангенциркулем і мікрометром; маса; густина.

Опис приладдя. Штангенциркуль (рис. 1) складається зі сталевої лінійки 5 з міліметровими поділками, відносно якої переміщується рамка 4 з нониусом, і двох пар губок – нерухомих 1 і рухомих 2. Якщо зімкнути губки, то відлік за нониусом дорівнює нулю. Якщо губки розсунути, то відстань між ними, очевидно, дорівнюватиме довжині, на яку нуль нониуса перемістився вздовж лінійки від її нуля.

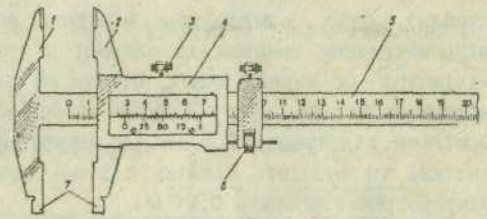


Рис. 1.

Для того, щоб виміряти штангенциркулем лінійні розміри тіла, його затискають між губками і відлічують за нониусом. Якщо "0" нониуса потрапляє між поділки масштабної лінійки, то поділки лінійки зліва від "0" нониуса показують розмір вимірюваного тіла в міліметрах. Порядковий номер поділки нониуса, яка збігається з поділкою міліметрової шкали, покаже десяті частки міліметра.

Мікрометр (рис. 2) – це інструмент для вимірювання лінійних розмірів з точністю до 0,01 мм. Він складається зі сталевої скоби 8, що має нерухому опорну п"яту 1, стебла 3, мікрометричного гвинта

2 і стопорного гвинта 7.

Мікрометричний гвинт переміщується всередині спеціальної гільзи з різьбою, закріпленою в стеблі 3. Крок гвинта звичайно становить 0,5 мм. На зовнішній поверхні стебла нанесені дві поздовжні шкали, зсунуті одна щодо одної на 0,5 мм. Ззовні стебло охоплює барабан 4, з"єднаний з мікрометричним гвинтом. Отже, під час обертання барабана обертається й гвинт; відповідно переміщується його вимірювальна поверхня 2.

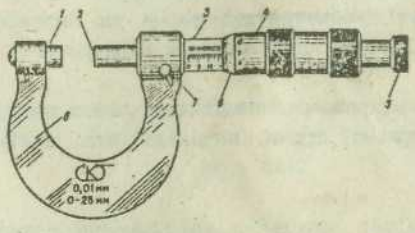


Рис. 2.

Барабан розділений на 50 однакових частин. Відлік виконують щодо поздовжньої лінії, нанесеної на стеблі. При цьому нижня шкала показує відстань між опорною п"ятою і мікрометричним гвинтом у міліметрах (при збігові "0" на барабані з поздовжньою лінією стебла). Отже, вимірювання лінійних розмірів тіла, притиснутого мікрометричним гвинтом до опорної п"яти, полягає у відліку цілих міліметрів по нижній шкалі, 0,5 мм по верхній шкалі (якщо барабан відкриває верхню шкалу) і сотих часток міліметра по шкалі барабана. Оскільки хід гвинта 0,5 мм, а барабан розділений на 50 однакових частин, то точність відліку під час вимірювання лінійних розмірів мікрометром становить 0,01 мм.

Основне джерело похибок під час вимірювань виникає внаслідок неоднакового натиску мікрометричного гвинта на вимірюваний предмет. Щоб уникнути цього, у кінці барабана є спеціальний пристрій – тріскачка 5, яка забезпечує рівномірний натиск.

Порядок виконання роботи

1. Вимірявши розміри тіла штангенциркулем і мікрометром. Результати вимірювань запишіть у таблицю.
2. За допомогою аналітичної ваги визначте масу тіла.
3. Обчисліть густину тіла.
4. Оцініть похибки виконаних вимірювань та обчислень (окремо для вимірювань штангенциркулем і мікрометром).
5. Порівняйте отримані результати та зробіть висновки.

Контрольні запитання

1. Що означає виміряти фізичну величину?
2. Які вимірювання називають прямими; непрямими?
3. Що називають абсолютною та відносною похибками вимірювання фізичної величини?
4. Як визначити відносну похибку обчислення об"єму циліндра, якщо його лінійні розміри виміряні лише один раз?
5. Що таке густина тіла; питома вага? Який зв"язок між ними?

Форма звіту до лабораторної роботи 101

1. Завдання.
2. Рисунок штангенциркуля та мікрометра.
3. Робочі формули:

$$\rho = m/abc,$$

де m – маса паралелепіпеда; a, b, c – довжина його сторін;

$$\rho = 4m/\pi d^2 h,$$

де m – маса циліндра; d, h – відповідно його діаметр і висота.

4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta\rho = \bar{\rho}\left[(\Delta m/\bar{m})^2 + (\Delta a/\bar{a})^2 + (\Delta b/\bar{b})^2 + (\Delta c/\bar{c})^2\right]^{1/2}; \quad \delta\rho = \Delta\rho/\bar{\rho};$$

$$\Delta\rho = \bar{\rho}\left[(\Delta m/\bar{m})^2 + (2\Delta d/\bar{d})^2 + (\Delta h/\bar{h})^2\right]^{1/2}; \quad \delta\rho = \Delta\rho/\bar{\rho}.$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$$m = \bar{m} \pm \Delta m;$$

№ п/п	a_i	Δa_i	$(\Delta a_i)^2$	b_i	Δb_i	$(\Delta b_i)^2$	c_i	Δc_i	$(\Delta c_i)^2$	ρ	$\Delta\rho$	$\delta\rho$%
1–5	—	—	—	—	—	—	—	—	—			
σ / $\delta_н$												

$$a = \bar{a} \pm \Delta a; \quad b = \bar{b} \pm \Delta b; \quad c = \bar{c} \pm \Delta c.$$

Аналогічну таблицю заповнюють для вимірювань мікрометром.

6. Кінцевий результат:

$$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta\rho; \quad \delta\rho = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 6.$$

7. Висновки.

Примітка. Визначаючи густину матеріалу циліндра, таблицю заповнюють для величин d і h.

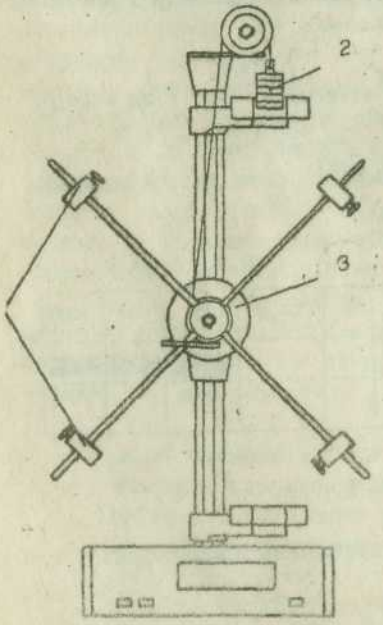
Лабораторна робота 111. **ВИВЧЕННЯ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ НА МАЯТНИКУ ОБЕРБЕКА**

Завдання: експериментально перевірити основний закон динаміки обертального руху твердого тіла (рівняння моментів), що має закріплену вісь обертання.

Приладдя: маятник Обербека; лічильник часу; технічна вага з набором важків; масштабна лінійка; штангенциркуль; набір тягарців різної маси.

Теоретичний матеріал: тангенціальне та кутове прискорення, їх взаємозв"язок; момент сили; момент інерції матеріальної точки та твердого тіла; момент імпульсу; другий закон Ньютона для поступального та обертального рухів; теорема Гюйгенса-Штейнера.

Література: 1, §§ 8, 9, 19, 21, 31, 32; 2, §§ 3, 4, 30, 32, 33, 35, 53; 3, §§ 1.8, 2.3, 2.5, 6.1-6.9, 7.5, 9.1, 9.4, 9.7; 5, §§ 9, 17, 50-54; 6, §§ 5, 37-39; 7, §§ 1.2, 5.1, 5.2, 5.4.



Опис установки. Основною частиною установки (див. рисунок) є маятник Обербека. Він складається з вала, на якому запресовані два шківи 3 різних радіусів R_1 і R_2 та чотири стержні у вигляді хрестовини. На стержнях можна закріплювати додаткові тягарці 1 однакової маси m'. Маятнику надає обертального руху тягарець 2, підвішений до нитки, другий кінець якої намотується на один зі шківів. Висоту опускання тягарця визначають за шкалою, а час опускання - за лічильником часу (механічним, електромеханічним чи електронним секундоміром), який вмикається і вимикається автоматично або вручну.

Виведення робочих формул. Основний закон динаміки обертального руху (другий закон Ньютона для обертального руху, або рівняння моментів) $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ перевіряють у два етапи.

Під час першого етапу перевіряють справедливість рівності $M_1/M_2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2$, якщо I=const. Нехтуючи силами тертя, запишемо рівняння обертального руху маятника

$$I\varepsilon = M , \qquad (1)$$

де I - момент інерції маятника відносно нерухомо закріпленої осі обертання; ε - проекція кутового прискорення на вісь обертання (дорівнює модулю вектора кутового прискорення); M - проекція моменту сили на вісь обертання (модуль моменту сили).

Момент сили

$$M = RT , \qquad (2)$$

де R - радіус шківа, на який намотана нитка; T - числове значення сили натягу нитки під час дії на неї тягарця масою m.

Рівняння поступального руху тягарця m має вигляд

$$ma = mg - T , \qquad (3)$$

де a - прискорення тягарця; g - прискорення вільного падіння.

Із рівнянь (1) і (2)

$$T = I\varepsilon/R. \qquad (4)$$

Врахувавши, що $a = \varepsilon R$, перепишемо останнє рівняння

$$T = Ia/R^2. \qquad (5)$$

Підставимо вираз (5) у формулу (3), тоді

$$a = \frac{mgR^2}{I + mR^2} . \qquad (6)$$

Вважаючи рух тягарця рівноприскореним, прискорення визначаємо за формулою

$$a = 2h/t^2, \qquad (7)$$

де h - висота, на яку опустився тягарець за час t.

Прирівнявши (6) і (7), одержуємо

$$2Ih = mR^2(gt^2 - 2h) . \qquad (8)$$

Зберігаючи сталим момент інерції I маятника та висоту h, поміняємо момент сили M, змінюючи масу тягарців і радіуси шківів, на які намотується нитка. Тоді на основі рівняння (8) можемо записати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2Ih = m_1R_1^2(gt_1^2-2h); \\ 2Ih = m_2R_2^2(gt_2^2-2h). \end{cases} \qquad (9)$$

Для зручності записів уведемо позначення

$$\begin{aligned} a &= m_1R_1^2(gt_1^2-2h); \\ b &= m_2R_2^2(gt_2^2-2h). \end{aligned} \qquad (10)$$

Записані вирази є першими робочими формулами в цій роботі.

Переконавшись, що $a = b$, ми переконуємось у прямо пропорційній залежності між результуючим моментом сили і кутовим прискоренням

$$M_1/\varepsilon_1=M_2/\varepsilon_2=I=\text{const}.$$

Під час другого етапу перевірки основного закону обертального руху залишимо сталими масу тягарця m і радіус шківа R, а будемо змінювати момент інерції маятника, змінюючи положення додаткових тягарців масою m' на стержнях.

Якщо I_o – момент інерції маятника (без тягарців m') відносно осі обертання, I_o' – сума моментів інерції чотирьох тягарців масою $4m'$ відносно осей, які проходять через їхні центри мас, то з віддаленням цих тягарців (їхніх центрів мас) уздовж стержнів на відстань l_1 від попередньої осі згідно з теоремою Гюйгенса–Штейнера сумарний момент інерції маятника

$$I_1'=I_o+ I_o'+ 4m'l_1^2 . \qquad (11)$$

Під час віддалення центрів мас чотирьох тягарців m' на відстань l_2 від осі обертання

$$I_2'=I_o+ I_o'+ 4m'l_2^2 . \qquad (12)$$

Якщо $l_2 > l_1$, то

$$I_2'- I_1'= 4m'(l_2^2-l_1^2) . \qquad (13)$$

Враховуючи рівняння (1), можемо записати

$$\frac{M_2}{\varepsilon_2} - \frac{M_1}{\varepsilon_1} = 4m'(l_2^2-l_1^2) . \qquad (14)$$

Виразимо ліву частину рівняння (14) через величини, які безпосередньо вимірюємо під час експерименту. Для цього використаємо рівняння (7), яке при двох змінних значеннях l буде мати такий вигляд:

$$I_1' = \frac{mR^2(gt_1^2-2h)}{2h} \quad ; \quad I_2' = \frac{mR^2(gt_3^2 - 2h)}{2h} , \qquad (15)$$

звідки

$$I_2' - I_1' = \frac{mgR^2}{2h}(t_3^2-t_1^2) . \qquad (16)$$

З формул (13) і (16) одержуємо

$$t_3^2 - t_1^2 = 8h\frac{m'}{m}\frac{(l_2^2 -l_1^2)}{gR^2} , \qquad (17)$$

де m' – маса одного тягарця на стержнях; m – маса тягарця, підвішеного до нитки, намотаної на шків радіусом R_1 або R_2; t_1, t_3 – час опускання тягарців з висоти h, якщо тягарці розміщені відповідно на відстані l_1, l_2 від осі обертання.

Уведемо такі позначення:

$$c = t_3^2 - t_1^2 \; ; \; d = 8h\frac{m'}{m}\frac{(l_2^2 -l_1^2)}{gR^2} . \qquad (18)$$

Вирази для c і d є відповідно третьою та четвертою робочими формулами в цій лабораторній роботі, а підтвердження рівності (17) є підтвердженням оберненої пропорційної залежності між моментом інерції і кутовим прискоренням, тобто правильності основного закону обертального руху.

Порядок виконання роботи

1. Вимірявте відстань h за шкалою, радіуси шківів R_1 і R_2 штангенциркулем. Визначте маси тягарців m_1, m_2 та m' за допомогою технічної ваги.
2. Закріпіть чотири додаткові тягарці на відстані l_2 від осі обертання. При цьому маятник повинен бути у байдужій рівновазі.
3. Вимірявте час t_1 опускання на відстань h тягарця масою m_1, підвішеного до нитки, намотаної на шків радіусом R_1. Вимірювання повторіть п"ять разів.

4. Вимірявши час t_2 опускання на відстань h тягарця масою m_2, підвішеного до нитки, намотаної на шків радіусом R_2. Вимірювання повторіть п"ять разів.
5. Результати запишіть у таблицю і за їхніми значеннями перевірте рівність $a=b$ (формула (10)).
6. Перемістіть по стержнях тягарці m' ближче до осі обертання і закріпіть їх на відстані l_1. Вимірявши час t_3 опускання на відстань h тягарця масою m_1, підвішеного до нитки, намотаної на шків радіусом R_1, або тягарця m_2, підвішеного до нитки, намотаної на шків радіусом R_2. Вимірювання повторіть п"ять разів.
7. Результати запишіть у таблицю. Перевірте рівність $c=d$. При цьому слід пам"ятати: якщо під час вимірювань, описаних у попередньому пункті, використано масу m_1 і радіус R_1, то у виразі (18) t_1 - час, одержаний під час виконання пункту 3, а якщо використано масу m_2 і радіус R_2, то у вираз (18) треба підставити значення часу, одержаного під час виконання пункту 4.
8. Оцініть точність експерименту, зробіть відповідні висновки.

Контрольні запитання

1. Що називають моментом інерції матеріальної точки; системи матеріальних точок; твердого тіла?
2. Сформулюйте і запишіть основний закон обертального руху.
3. Запишіть другий закон Ньютона для випадку опускання тягаря.
4. Сформулюйте теорему Штейнера.
5. З яких доданків складається формула для моменту інерції маятника Обербека з тягарцями на стержні?
6. Як визначити напрямок вектора моменту сили?
7. Як можна змінити момент сили, що діє на маятник Обербека?
8. Як можна змінити момент інерції маятника Обербека?
9. Запишіть формулу для виразу моменту сили, під дією якої обертається маятник.
10. Що називають кутовим прискоренням і як воно пов"язане з тангенціальним прискоренням?

Форма звіту до лабораторної роботи 111

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робочі формули з розшифруванням їхніх величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta a = \bar{a}\left\{\left[\Delta m_1/\bar{m}_1\right]^2+\left[2\Delta R_1/\bar{R}_1\right]^2+\left[2g\bar{t}_1\Delta t_1/(g\bar{t}_1^2-2\bar{h})\right]^2+\left[2\Delta h/(g\bar{t}_1^2-2\bar{h})\right]^2\right\}^{1/2};$$

$$\delta a = \Delta a/\bar{a};$$

$$\Delta b = \bar{b}\left\{\left[\Delta m_2/\bar{m}_2\right]^2+\left[2\Delta R_2/\bar{R}_2\right]^2+\left[2g\bar{t}_2\Delta t_2/(g\bar{t}_2^2-2\bar{h})\right]^2+\left[2\Delta h/(g\bar{t}_2^2-2\bar{h})\right]^2\right\}^{1/2};$$

$$\delta b = \Delta b/\bar{b};$$

$$\Delta c = \bar{c}\left\{\left[2\bar{t}_1\Delta t_1/(\bar{t}_1^2-\bar{t}_3^2)\right]^2+\left[2\bar{t}_3\Delta t_3/(\bar{t}_1^2-\bar{t}_3^2)\right]^2\right\}^{1/2}; \quad \delta c = \Delta c/\bar{c};$$

$$\Delta d = \bar{d}\left\{\left[\Delta h/\bar{h}\right]^2+\left[\Delta m'/\bar{m}'\right]^2+\left[\Delta m/\bar{m}\right]^2+\left[2\Delta R/\bar{R}\right]^2+\left[2\bar{l}_1\Delta l_1/(\bar{l}_1^2-\bar{l}_2^2)\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[2\bar{l}_2\Delta l_2/(\bar{l}_1^2-\bar{l}_2^2)\right]^2\right\}^{1/2}; \quad \delta d = \Delta d/\bar{d}.$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$h = \bar{h} \pm \Delta h$; $R_1 = \bar{R}_1 \pm \Delta R_1$; $R_2 = \bar{R}_2 \pm \Delta R_2$;

$m_1 = \bar{m}_1 \pm \Delta m_1$; $m_2 = \bar{m}_2 \pm \Delta m_2$; $m' = \bar{m}' \pm \Delta m'$; $l_1 = \bar{l}_1 \pm \Delta l_1$; $l_2 = \bar{l}_2 \pm \Delta l_2$;

№ п/п	t_{1i}	Δt_{1i}	t_{2i}	Δt_{2i}	t_{3i}	Δt_{3i}	a	Δa	b	Δb	c	Δc	d	Δd
1–5														
с/зн														

$t_1 = \bar{t}_1 \pm \Delta t_1$; $t_2 = \bar{t}_2 \pm \Delta t_2$; $t_3 = \bar{t}_3 \pm \Delta t_3$.

6. Кінцеві результати:

$a = \bar{a} \pm \Delta a$; $\delta a =$; $p =$; $n = 5$;
$b = \bar{b} \pm \Delta b$; $\delta b =$; $p =$; $n = 5$;
$c = \bar{c} \pm \Delta c$; $\delta c =$; $p =$; $n = 5$;
$d = \bar{d} \pm \Delta d$; $\delta d =$; $p =$; $n = 5$.

7. Висновки.

Лабораторна робота 113. **ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ ДВОЛАНКОВОЇ СИСТЕМИ ВІД ЇЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ**

Завдання: експериментально дослідити залежність моменту інерції дволанкової системи від кута між її ланками.

Приладдя: штатив із горизонтальною віссю, на яку підвішують дволанкову систему; металева тригранна призма; технічна вага з набором важків; вимірювальна лінійка; секундомір; транспортир.

Теоретичний матеріал: центр мас; момент інерції матеріальної точки та твердого тіла; момент сили; момент імпульсу; рівняння моментів; фізичний маятник.

Література: 1, §§ 21, 31, 32, 34; 2, §§ 19, 30, 32, 33, 37, 41, 53; 3, §§ 6.1-6.13, 9.1-9.6; 5, §§ 55, 124; 6, §§ 9, 38, 39, 54; 7, § 3.4.

Опис установки. Основною частиною установки є дволанкова система, що складається з двох металевих планок 2, на яких висверджені рівновіддалені отвори. Планки (ланки) можна жорстко скріпити гвинтом 1 з гайкою в різних точках під довільним кутом. Якщо таку систему підвісити на горизонтальну вісь 3, яка не проходитиме через центр мас ланок і надати їй коливального руху, то вона буде коливатися як фізичний маятник.

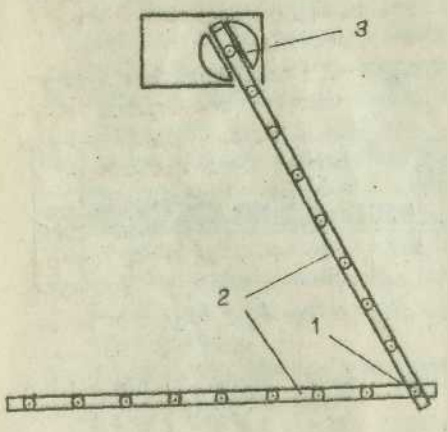


Рис. 1.

Виведення робочої формули. Період коливань фізичного маятника описує (див. роб. 115) формула

$$T = 2\pi \sqrt{I/mgd}\,, \qquad (1)$$

де I – момент інерції маятника; m – маса маятника; g – прискорення вільного падіння; d – відстань від центра мас маятника до осі підвісу.

З наведеної формули для моменту інерції одержимо

$$I = T^2 mgd/4\pi^2. \qquad (2)$$

Порядок виконання роботи

1. Визначте масу першої m_1 та масу другої ланок з гвинтом і гайкою m_2.
2. З"єднайте ланки (точку з"єднання вказує викладач) так, щоб кут між ними дорівнював 0°, і визначте положення центра мас системи. Для цього жорстко з"єднану систему зрівноважте на ребрі тригранної призми. Вимірйте лінійкою відстань від положення центра мас до точки підвісу.
3. Підвісьте систему на горизонтальну вісь так, щоб остання пройшла через точку підвісу, вказану викладачем. Надайте системі коливального руху. Секундоміром визначте час t для N повних коливань системи та обчисліть період коливань $T = t / N$.
4. Досліди 2 і 3 повторіть для кута між ланками 180°.
5. Щоб визначити відстань d при кутах 135, 90 і 45°, треба виконати геометричну побудову (див. рис. 2.) на основі таких вимірювань: а) методом, описаним у п. 2, визначте положення центра мас ланок AB і CD (точки A' і B'); б) вимірйте відстань d_1 від центра мас першої ланки AB до точки підвісу O; в) вимірйте відстань d_2 від центра мас другої ланки (разом з гвинтом і гайкою) до точки з"єднання ланок; г) на міліметровому папері побудуйте згідно з рис. 2, де

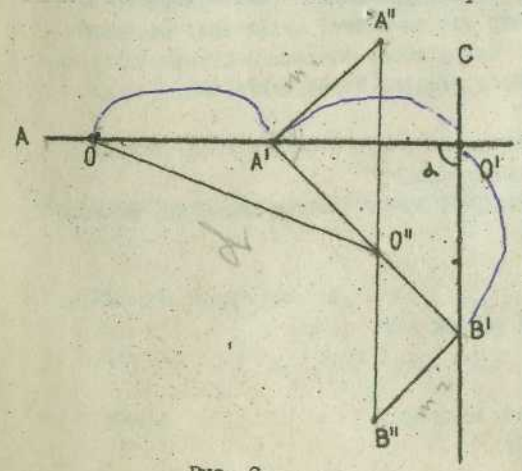


Рис. 2.

у довільно вибраному масштабі відкладені: AB – довжина першої ланки, CD – довжина другої ланки під відповідним кутом α; точка O – точка підвісу, точка O' – точка з"єднання ланок, точка A' – положення центра мас першої ланки, точка B' – положення центра мас другої ланки.

Центр мас (точка O'') двох ланок лежить на лінії, яка з"єднує центри мас обох ланок (лінія $A'B'$) і ділить відстань між ними на частини, обернено пропорційні до мас ланок. Положення точки O'' визначають так: з точки A' проводять у довільному масштабі та в довільному напрямку відрізок $A'A''$, пропорційний до маси m_2 ланки CD, а з точки B' у протилежному напрямку в тому ж масштабі – відрізок $B'B''$, пропорційний масі m_1 ланки AB. Точка O'' перетину прямих $A'B'$ і $A''B''$ буде центром мас дволанкової системи.

6. Повторіть п. 2 для кутів, зазначених у п. 4.
7. Обчисліть момент інерції дволанкової системи для всіх значень кута α та оцініть точність одержаних результатів.

Контрольні запитання

1. Що називають центром мас системи, яка складається з двох матеріальних точок; n матеріальних точок?
2. Запишіть формулу, за якою визначають радіус-вектор центра мас системи матеріальних точок.
3. Що називають моментом інерції матеріальної точки; твердого тіла?
4. Який тип руху виконує центр мас замкненої механічної системи?
5. Обчисліть момент інерції однорідного стержня відносно осі, що проходить через один із його кінців; через центр мас.
6. Що таке фізичний маятник?
7. Що називають моментом сили?
8. Як направлений вектор моменту сили?
9. Запишіть рівняння моментів для випадку обертання тіла навколо нерухомо закріпленої осі.
10. Виведіть робочу формулу.

Форма звіту до лабораторної роботи 113

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робоча формула з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta I = \bar{I}\left[(\Delta m/\bar{m})^2 + (\Delta d/\bar{d})^2 + (2\Delta T/\bar{T})^2\right]^{1/2}; \qquad \delta I = \Delta I/\bar{I}.$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$m_1 = \bar{m}_1 \pm \Delta m_1$; $m_2 = \bar{m}_2 \pm \Delta m_2$; $m = \bar{m} \pm \Delta m$;

№ п/п	α°	n	t_i, с	T, с	d, м	I, кг·м²	ΔI, кг·м²	δI%
1 – 5								
с/зн	0	10						
1 – 5								
с/зн	45	10						
1 – 5								
с/зн	90	10						
1 – 5								
с/зн	135	10						
1 – 5								
с/зн	180	10						
1 – 5								

$T_0 = \bar{T}_0 \pm \Delta T_0$; $T_{45} = \bar{T}_{45} \pm \Delta T_{45}$; аналогічно для T_{90}, T_{135}, T_{180};

$d_0 = \bar{d}_0 \pm \Delta d_0$; $d_{45} = \bar{d}_{45} \pm \Delta d_{45}$; аналогічно для d_{90}, d_{135}, d_{180}.

6. Геометричні побудови на міліметровому папері для кутів 45, 90, 135°.

7. Кінцевий результат: $I_0 = \bar{I}_0 \pm \Delta I_0$; $p =$; $n = 5$.

Аналогічно для I_{45}, I_{90}, I_{135}, I_{180}.

8. Висновки.

Лабораторна робота 114. **ДОСЛІДНА ПЕРЕВІРКА ЗАКОНУ ЗБЕРЕЖЕННЯ МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ**

Завдання: перевірити експериментальним шляхом справедливість закону збереження моменту імпульсу.

Приладдя: установка; секундомір.

Теоретичний матеріал: кутова швидкість; момент сили та момент інерції; другий закон Ньютона для обертального руху; момент імпульсу; закон збереження моменту імпульсу; закон збереження енергії; робота сили.

Література: 1, §§ 9, 21, 24, 25, 31, 32; 2, §§ 3, 4, 10, 26, 27, 30, 32, 33, 37; 3, 1.3, 1.4, 1.6, 1.8, 2.3, 6.1-6.8, 7.1-7.5, 7.7-7.12, 9.1-9.8; 5, §§ 51-53, 65; 6, §§ 3-5, 24, 27, 29, 38, 39, 42; 7, §§ 5.1, 5.2, 5.4.

Опис установки. Основна частина установки-хрестовина, яка може обертатися навколо вертикальної осі під дією моменту сили натягу нитки (рис.1). Нитку намотують на колонку *3*, радіус якої є плечем сили. До нитки підвішують тягарець *6*, положення якого можна відмічати за шкалою *5*. Горизонтальний стержень хрестовини *1* закінчується упорами *7*. По цьому стержні можуть вільно рухатися два тягарці *2*. За допомогою гвинта *4* тягарці можна закріпити поблизу вертикальної осі хрестовини. В такому положенні тягарців хрестовина буде мати мінімальний момент інерції. Якщо тягарці розсунути до упорів, то це спричинить

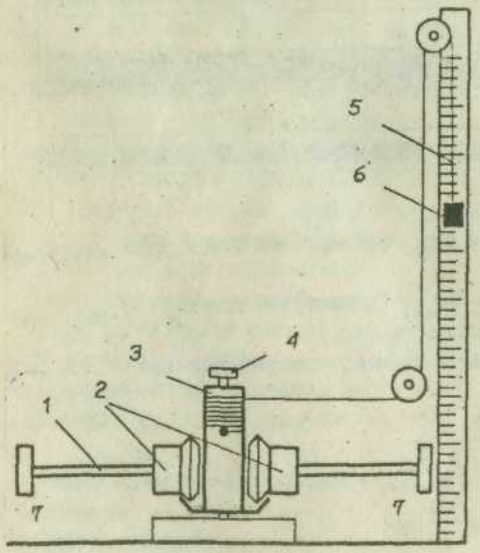


Рис. 1.

збільшення моменту інерції хрестовини. Під час опускання тягарця *6* з якоїсь висоти хрестовина буде обертатися зі сталим додатним прискоренням (момент сили - стала величина). Після того, як нитка повністю розкрутиться з колонки 3 (тягарець *6* опуститься в нижнє положення), почнеться обертальний рух хрестовини з від"ємним кутовим прискоренням. Нитка знову буде намотуватися на колонку, а тягарець - підніматися вгору. Якби не було втрат на роботу сили тертя, то тягарець повернувся б у попереднє положення. Знаючи висоту, з якої опускається тягарець, і висоту, на яку він піднявся, можна визначити роботу сил тертя. Це обчислення можна виконати для двох випадків: мінімального та максимального моментів інерції хрестовини.

Установка дає змогу реалізувати рух зі змінним моментом інерції, а саме: під час опускання тягарця *6* хрестовина має мінімальний момент інерції (тягарці *2* є біля колонки); у нижньому положенні тягарця *6* тягарці *2* під дією відцентрової сили розлетяться до упорів *7*, що спричинить різке зростання моменту інерції хрестовини. Тепер тягарець *6* буде підніматися під час обертання хрестовини з максимальним моментом інерції.

Виведення робочої формули. Основний закон динаміки обертального руху (рівняння моментів) визначає зв"язок між моментом зовнішніх сил $\vec{M}$, що діють на тіло, та його моментом імпульсу $\vec{L}$:

$$d\vec{L}/dt = \vec{M} . \qquad (1)$$

Для ізольованої системи, тобто системи, на яку не діють зовнішні обертальні моменти, одержимо

$$d\vec{L}/dt = 0 , \text{ тобто } \vec{L} = \text{const} . \qquad (2)$$

Ця рівність виражає закон збереження моменту імпульсу: момент імпульсу ізольованої системи не змінюється під час будь-яких процесів, що відбуваються в системі.

Під час обертання твердого тіла навколо нерухомої осі при відсутності моментів зовнішніх сил останній вираз набуває вигляду

$$I\omega = \text{const} . \qquad (3)$$

З виразу (3) видно, що зі зменшенням моменту інерції тіла I його кутова швидкість ω збільшується, причому допускають, що в деякі моменти часу тіло перестає бути "твердим".

Наведемо графічно залежність кутової швидкості хрестовини від часу під час її руху зі змінним моментом інерції (рис. 2). Вітка *OA*, що зростає, відповідає першій стадії, *BC* – третій стадії. За незначний проміжок часу Δt (відрізок *DF*) кутова швидкість різко зменшується. Ділянка *AB* відповідає стадії збільшення моменту інерції хрестовини. Застосовуючи закон збереження моменту кількості руху відповідно до (3), для нашого випадку

$$I_1/I_2 = \omega_2/\omega_1 , \qquad (4)$$

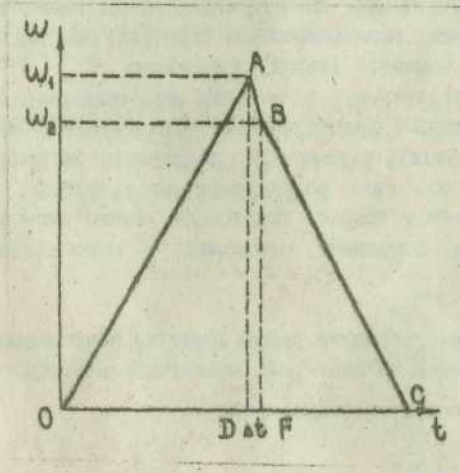


Рис. 2.

де I_1, I_2 – відповідно мінімальний та максимальний моменти інерції хрестовини; ω_1 – найбільша кутова швидкість на першій стадії руху (точка *A* на графіку); ω_2 – найбільша кутова швидкість на третій стадії руху (точка *B* на графіку).

Визначимо величини, що є у виразі (4), через інші, які можна безпосередньо виміряти на описаній установці.

Відношення моментів інерції визначимо за допомогою рівняння руху.

Поступальний рух тягарця, прикріпленого до нитки, описує рівняння

$$m\, dv/dt = mg - T , \qquad (5)$$

де m – маса тягарця, прикріпленого до нитки; dv/dt – його прискорення; T – сила натягу нитки; v – швидкість поступального руху тягарця. Обертальний рух хрестовини описує основний закон обертального руху (1). У нашому випадку

$$I_1 d\omega/dt = Tr , \qquad (6)$$

де r – радіус колонки, на яку намотана нитка; $d\omega/dt$ – кутове прискорення, пов"язане з лінійним залежністю

$$dv/dt = r\, d\omega/dt . \qquad (7)$$

Визначивши з виразу (6) силу натягу нитки T, підставивши його значення в (5) та скориставшись формулою (7) для лінійного прискорення тягарця (за умови $mr^2 \ll I$), отримаємо

$$dv/dt = mgr^2/I_1 . \qquad (8)$$

З іншого боку, під час рівноприскореного руху без початкової швидкості

$$dv/dt = 2h_1/t_1^2 , \qquad (9)$$

де h_1 – висота, з якої опускається тягарець до повного розмотування нитки. З рівнянь (8) та (9) одержимо

$$I_1 = \frac{mgr^2}{2h_1} t_1^2 . \qquad (10)$$

Аналогічно під час руху хрестовини з максимальним моментом інерції

$$I_2 = \frac{mgr^2}{2h_1} t_2^2 , \qquad (11)$$

де t_2 – час опускання тягарця з висоти h_1. З (10) та (11)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} . \qquad (12)$$

Отже, праву частину рівняння (4) ми вже виразили за допомогою величин, які безпосередньо визначаємо під час досліду.

Співвідношення кутових швидкостей визначимо з закону збереження енергії.

У першій стадії під час опускання тягарця з висоти h_1

$$mgh_1 = \frac{1}{2} I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2} mv_1^2 + A_1 , \qquad (13)$$

де A_1 – робота сил тертя під час опускання тягарця. Скориставшись співвідношенням між лінійною та кутовою швидкостями $v_1 = \omega_1 r$, при $mr^2 \ll I_1$ визначимо

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(mgh_1 - A_1)}{I_1}} . \qquad (14)$$

Для всіх трьох стадій (опускання тягарця з висоти h_1, піднімання його на висоту h_2 при змінному моменті інерції хрестовини) закон збереження енергії, очевидно, виглядатиме так:

$$mgh_1 = mgh_2 + A_1 + A_2 + (I_1\omega_1^2 - I_2\omega_2^2)/2, \qquad (15)$$

де A_2 – робота сил тертя під час піднімання тягарця на висоту h_2; останній член – це енергія, яка перетворилася в тепло під час непружного зіткнення тягарців з упорами. З рівнянь (14) та (15)

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2(mgh_2 + A_2)}{I_2}} . \qquad (16)$$

Тепер праву частину рівняння (4) можемо записати, використавши формули (14) та (16),

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{(mgh_2 + A_2)I_1}{(mgh_1 - A_1)I_2}} . \qquad (17)$$

З рівнянь (4), (12) та (17)

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{mgh_2 + A_2}{mgh_1 - A_1} . \qquad (18)$$

Виведемо вирази для A_1 та A_2 через величини, які безпосередньо вимірюємо під час досліду.

Нехай тягарець при найменшому моменті інерції I_1 опускається з висоти h_1 і піднімається на висоту h_3. Енергію, яка дорівнює різниці потенціальних енергій тягарця, витрачено на роботу сил тертя за весь час руху системи. Робота тільки під час опускання тягарця

$$A_1 = \alpha_1 mgh_1, \qquad (19)$$

де α_1 – величина, що показує, яка частина потенціальної енергії тягарця, піднятого на висоту h_1, витрачається на виконання роботи на подолання сил тертя під час його повного опускання.

Значення α_1 можна визначити за допомогою таких міркувань. Різниця потенціальних енергій тягарця на початковій h_1 та кінцевій h_3 висотах повинна дорівнювати роботі сил тертя на повному шляху

тягарця $h_1 + h_3$, яку за аналогією з (19) можна записати

$$A_1' = \alpha_1 mg(h_1 + h_3).$$

Отже,

$$\alpha_1 mg(h_1 + h_3) = mg(h_1 - h_3) . \qquad (20)$$

Звідси

$$\alpha_1 = \frac{h_1 - h_3}{h_1 + h_3} . \qquad (21)$$

Аналогічно до формули (19) виразимо роботу, яку виконують сили тертя під час піднімання тягарця на висоту h_2 (згадаємо, що в цьому випадку система мала максимальний момент інерції I_2):

$$A_2 = \alpha_2 mgh_2 . \qquad (22)$$

Щоб визначити коефіцієнт α_2, використаємо ту частину експерименту, в якій тягарець опускався з висоти h_1 і піднімався на висоту h_4 при максимальному моменті інерції. Аналогічно до (19)

$$\alpha_2 mg(h_1 + h_4) = mg(h_1 - h_4). \qquad (23)$$

Звідси

$$\alpha_2 = \frac{h_1 - h_4}{h_1 + h_4} . \qquad (24)$$

Підставивши формулу (21) у (19), а (24) у (22), одержимо

$$A_1 = \frac{(h_1 - h_3)}{h_1 + h_3} mgh_1 ;$$
$$A_2 = \frac{(h_1 - h_4)}{h_1 + h_4} mgh_2 . \qquad (25)$$

Підставивши формулу (25) у (18) та виконавши елементарні перетворення одержимо робочу формулу для перевірки закону збереження моменту імпульсу:

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{h_2 (h_1 + h_3)}{h_3 (h_1 + h_4)} . \qquad (26)$$

Позначимо ліву частину формули (26) a, праву – b, тоді перевірка

закону збереження моменту імпульсу зводиться до перевірки рівності

$$a = b \,. \qquad (27)$$

Порядок виконання роботи

1. Закріпіть тягарці *6* біля колонки. Обертаючи хрестовину, намотайте нитку на колонку так, щоб тягарець *2* піднявся на задану висоту h_1.
2. Одночасно зі звільненням хрестовини увімкніть секундомір і вимкніть його, коли тягарець *2* опуститься на всю довжину нитки. Це буде t_1. Спостерігаючи за тягарцем, який піднімається, відмітьте максимальну висоту його підняття h_3.
3. Аналогічно виміряйте величини t_2 та h_4. Перед вимірюванням звільніть тягарці *6* і розсуньте їх до упорів.
4. Щоб виміряти висоту h_2, на яку підніметься тягарець при зміненому моменті інерції хрестовини, слід наблизити тягарці *6* до колонки та підняти колонку так, щоб штифт, до якого кріпиться нитка, зайшов в отвір на колонці. У такому положенні штифта намотайте нитку на колонку, доки тягарець **5** не підніметься на висоту h_1. Відпустіть хрестовину. Коли нитка повністю розмотається, вона витягне штифт, звільнивши колонку, яка опуститься під дією сили ваги і відпустить тягарці **2**. Під дією відцентрової сили тягарці швидко розлетяться до упорів. Кутова швидкість хрестовини при цьому різко зменшиться. Коли обертання хрестовини припиниться, відмітьте висоту h_2, на яку піднявся тягарець **5**.
5. Усі вимірювання виконайте п"ять разів. Результати вимірювань запишіть у таблицю та на їхній основі перевірте справедливість закону збереження моменту імпульсу. Оцініть точність експерименту. Зробіть відповідні висновки.

Контрольні запитання

1. Що називають моментом імпульсу? Яка формула його описує у випадку обертання навколо нерухомо закріпленої осі?
2. Сформулюйте та виведіть закон збереження моменту імпульсу.
3. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу у випадку обертання тіла навколо нерухомо закріпленої осі.
4. Сформулюйте закон збереження енергії.
5. Сформулюйте та виведіть закон збереження механічної енергії.
6. Запишіть і сформулюйте закон збереження енергії для випадку, описаного в цій роботі.

7. Запишіть формулу кінетичної енергії для поступального та обертального рухів.
8. Що називається моментом інерції?
9. Нарисуйте та поясніть графік залежності кутової швидкості хрестовини від часу під час її руху зі змінним моментом інерції.
10. Запишіть рівняння поступального руху тягарця, який обертає хрестовину.

Форма звіту до лабораторної роботи 114

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робочі формули з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta a = \bar{a}\left\{\left[\frac{2\Delta t_1}{\bar{t}_1}\right]^2 + \left[\frac{2\Delta t_2}{\bar{t}_2}\right]^2\right\}^{1/2}; \quad \delta a = \frac{\Delta a}{\bar{a}};$$

$$\Delta b = \bar{b}\left\{\left[\frac{\Delta h_2}{\bar{h}_2}\right]^2 + \left[\frac{\Delta h_1(\bar{h}_4-\bar{h}_3)}{(\bar{h}_1+\bar{h}_3)(\bar{h}_1+\bar{h}_4)}\right]^2 + \left[\frac{\bar{h}_1\Delta h_3}{\bar{h}_3(\bar{h}_1+\bar{h}_4)}\right]^2 + \left[\frac{\Delta h_4}{\bar{h}_1+\bar{h}_4}\right]^2\right\}^{1/2}.$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$$h_1 = \bar{h}_1 \pm \Delta h_1; \quad \delta h_1 = \quad .$$

№ п/п	t_{1i}	t_{2i}	h_{2i}	h_{3i}	h_{4i}	a	Δa	$\delta a\%$	b	Δb	$\delta b\%$
1-5											
с/зн											

$$h_2 = \bar{h}_2 \pm \Delta h_2; \quad \delta h_2 = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5.$$

Аналогічно для h_3, h_4, t_1, t_2.

6. Кінцевий результат:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a; \quad \delta a = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5;$$

$$b = \bar{b} \pm \Delta b; \quad \delta b = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5.$$

7. Висновки.

Лабораторна робота 115. **ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ ВІЛЬНОГО ПАДІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ФІЗИЧНОГО МАЯТНИКА**

Завдання: визначити прискорення вільного падіння.

Приладдя: оборотний фізичний маятник; секундомір; металева тригранна призма; масштабна лінійка.

Теоретичний матеріал: момент сили; момент інерції; момент імпульсу; основний закон динаміки обертального руху; теорема Гюйгенса-Штейнера; гармонічні коливання; фізичний маятник; період коливання фізичного маятника; зведена довжина фізичного маятника; оборотний маятник; прискорення вільного падіння, його залежність від висоти і географічної широти.

Література: 1, §§ 21, 24, 31, 32, 34, 50, 51; 2, §§ 30, 32-33, 35-37, 39-41, 49, 51, 57; 3, §§ 5.1, 6.1-6.11, 9.1-9.7, 9.9; 4, §§ 5.1-5.4, 5, §§ 48, 50-53, 57, 59, 65, 76-77, 123-124; 7, §§ 2.3, 5.1, 5.3.

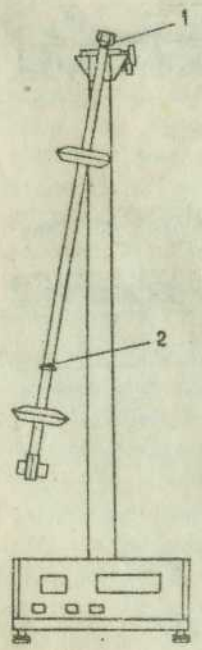


Рис. 1.

Опис установки. Установка (рис. 1) змонтована на основі з чотирма ніжками, висоту яких можна змінювати (вирівнювати установку). До основи прикріплена колонка, на якій зафіксовано верхній і нижній кронштейни. До верхнього кронштейна на вмонтованих вкладках підвішений оборотний фізичний маятник, а до нижнього – фотоелектричний датчик. Оборотний маятник виконаний у вигляді сталевого стержня, на якому пересувають та фіксують дві металеві призми (1 – для підвішення маятника в прямому положенні, 2 – в оберненому) та два тягарі (сочевиці).

Виведення робочої формули. Фізичним маятником називається тверде тіло, закріплене на горизонтальній осі, яка не проходить через центр мас, і може коливатися відносно цієї осі.

Якщо тверде тіло коливається, то сила тяжіння, яка діє на кожний елемент цього тіла, створює деякий момент сили відносно осі. Сума моментів цих сил дорівнює моментові рівнодійної сили тяжіння, прикладеної до центра мас тіла.

Існує взаємозв"язок між моментом $\vec{M}$ зовнішньої сили відносно осі обертання та моментом імпульсу тіла $\vec{L}$, що його описує рівняння моментів

$$d\vec{L}/dt = \vec{M}. \qquad (1)$$

У цьому випадку величина вектора моменту сили

$$M = -mgd \sin\alpha,$$

де d – відстань від осі обертання O до центра мас C (рис. 2); α – кут між прямою OC і вертикаллю.

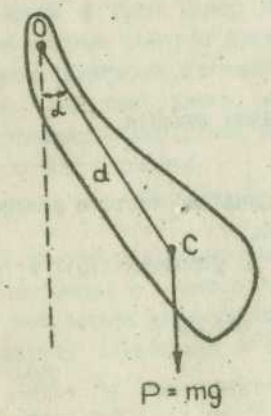


Рис. 2.

У випадку обертання навколо нерухомої осі момент імпульсу тіла легко виразити через кутову швидкість обертання. Елемент маси Δm_i цього тіла має елементарний момент імпульсу

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i\, \Delta m_i \vec{v}_i],$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, значення якого дорівнює відстані від осі обертання до елемента маси; $\vec{v}_i$ – лінійна швидкість елемента маси Δm_i.

Враховуючи взаємозв"язок між лінійною $\vec{v}$ та кутовою швидкістю $d\vec{\alpha}/dt = \vec{\omega}$, а саме: $\vec{v}_i = [\vec{\omega}\, \vec{r}_i]$, одержимо, що $|L| = r_i^2 \omega \Delta m_i$. Оскільки моменти імпульсу всіх елементів мас напрямлені по осі обертання та їхня кутова швидкість однакова, то повний момент імпульсу тіла

$$L = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 \omega = \sum_{i=1}^{n} (m_i r_i^2)\omega = I\omega,$$

де $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ – величина, яка залежить від розподілу маси тіла відносно

осі та є мірою інерції тіла під час обертального руху. Її називають моментом інерції тіла відносно вибраної осі.

Після врахування M та L рівняння моментів (1) набуває вигляду

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = -mgd\sin\alpha. \qquad (2)$$

Оскільки $\omega = d\alpha/dt$, то $d\omega/dt = d^2\alpha/dt^2$ і рівняння (2) можна записати у вигляді

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\sin\alpha. \qquad (3)$$

Це - диференціальне рівняння, з якого визначають кут відхилення як функцію часу. Розв"язати це рівняння досить складно, але якщо обмежитись малими кутами (замінити $\sin\alpha$ на α), то задача значно спрощується. За цих умов рівняння руху маятника (3) набуває вигляду

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\alpha. \qquad (4)$$

Розв"язком цього рівняння є гармонічна функція

$$\alpha = \alpha_o\cos\omega t, \qquad (5)$$

де α_o - амплітуда коливань; ω - циклічна частота коливань. Очевидно, що $\omega = 2\pi\nu$, де ν - частота коливань.

Підставивши значення α з рівняння (5) у рівняння (4), одержимо

$$\omega^2\alpha_o\cos\omega t = \frac{mgd}{I}\alpha_o\cos\omega t. \qquad (6)$$

Щоб рівняння (4) задовольнялось, потрібно, щоб $\omega^2 = \frac{mgd}{I}$, або

$$\omega = \sqrt{mgd/I}. \qquad (7)$$

Очевидно, що період коливання фізичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{I/mgd}, \qquad (8)$$

де I - момент інерції маятника відносно осі, що проходить через вісь його підвісу; m - маса маятника; d - відстань від осі підвісу до центра мас маятника; g - прискорення вільного падіння.

Довжина математичного маятника, який має однаковий період з фізичним маятником, називається зведеною довжиною фізичного маятника. Як бачимо (для цього у формулу (8) треба підставити вираз для моменту інерції матеріальної точки $I = ml^2$ та прийняти, що $d = l$), період коливання математичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \qquad (9)$$

Отже, зведена довжина фізичного маятника

$$l = I/md. \qquad (10)$$

На практиці зведену довжину фізичного маятника визначає відстань між точкою підвісу маятника і його центром качання. Ці дві точки лежать на одній прямій з центром мас маятника та розміщені по обидва боки від нього. Точки мають властивість спряженості, тобто якщо повернути маятник і його центр качання зробити точкою підвісу, то попередня точка стане центром качання і таким чином період коливання маятника збереже попереднє значення.

Виявивши дві такі точки, навколо яких маятник коливається з однаковим періодом, і вимірявши період і відстань між цими точками, можна з формули (9) отримати

$$g = 4\pi^2 l/T^2. \qquad (11)$$

Оскільки домогтися цілком однакових періодів дуже тяжко, Бессель довів, що прискорення g можна простіше і з тією ж точністю одержати, якщо періоди збігаються лише приблизно.

Нехай маятник підвішений у прямому положенні, тоді період його коливань

$$T_1 = 2\pi\sqrt{I/mgd_1} = 2\pi\sqrt{(I_o + md_1^2)/mgd_1} \qquad (12)$$

(оскільки згідно з теоремою Гюйгенса-Штейнера $I = I_o + md_1^2$, де I_o - момент інерції маятника відносно осі, яка проходить через його центр мас).

Якщо маятник підвісити в оберненому положенні, то відповідно

$$T_2 = 2\pi\sqrt{(I_o + md_2^2)/mgd_2}. \qquad (13)$$

У формулах (12), (13) d_1 і d_2 – відстані від центра мас маятника до першої і другої призм, тому $l = d_1 + d_2$. Із цих формул випливає

$$4\pi^2 I_o = T_1^2 m d_1 g - 4\pi^2 m d_1^2 \quad ; \qquad (14)$$

$$4\pi^2 I_o = T_2^2 m d_2 g - 4\pi^2 m d_2^2 \quad . \qquad (15)$$

Прирівнявши праві частини рівнянь (14) і (15) та врахувавши, що $l = d_1 + d_2$, одержимо робочу формулу

$$g = 4\pi^2 l (d_1 - d_2) / (d_1 T_1^2 - d_2 T_2^2) \quad . \qquad (16)$$

Порядок виконання роботи

1. Встановіть сочевиці і призми згідно з варіантом, що його задав викладач. Виміряйте час десяти повних коливань маятника в прямому та оберненому положеннях для всіх місць верхньої призми, що вказані у варіанті. Щоб уникнути промахів, вимірювання повторіть тричі.
3. Визначте середні значення періодів для прямого T_1 та оберненого T_2 положень маятника та побудуйте графік залежності цих періодів від положення верхньої призми h.
4. Координата точки перетину графіків по осі абсцис дає відстань h, встановіть туди верхню призму і п"ять разів виміряйте періоди T_1 і T_2.
5. Якщо періоди коливань маятника в прямому та оберненому положеннях збігаються з точністю 0,01 с, то зніміть маятник з підвісу, покладіть його на тригранну металеву призму, визначте положення центра мас і виміряйте відстані d_1 і d_2.
6. За робочою формулою обчисліть значення g і оцініть точність одержаного результату.

Контрольні запитання

1. Що називають прискоренням вільного падіння?
2. Від чого, чому і як залежить прискорення вільного падіння?
3. Що називають математичним маятником; фізичним маятником?
4. Запишіть рівняння руху фізичного маятника та виведіть формулу для періоду його коливань.
5. Що називається зведеною довжиною фізичного маятника?
6. Які коливання називають гармонічними?

7. Що називається моментом інерції твердого тіла?
8. Що таке момент сили?
9. Що називається моментом імпульсу?
10. Як направлені вектори моменту сили; моменту імпульсу?

Форма звіту до лабораторної роботи 115

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робоча формула з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta g = \bar{g} \left\{ \left[\Delta \bar{l}/\bar{l}\right]^2 + \left[(\bar{T}_1^2 - \bar{T}_2^2)\bar{d}_2 \Delta d_1 / (\bar{d}_1 - \bar{d}_2)(\bar{d}_1 \bar{T}_1^2 - \bar{d}_2 \bar{T}_2^2)\right]^2 + \right.$$

$$+ \left[(\bar{T}_1^2 - \bar{T}_2^2)\bar{d}_1 \Delta d_2 / (\bar{d}_1 - \bar{d}_2)(\bar{d}_1 \bar{T}_1^2 - \bar{d}_2 \bar{T}_2^2)\right]^2 + \left[2\bar{d}_1 \bar{T}_1 \Delta T_2 / (\bar{d}_1 \bar{T}_1^2 - \bar{d}_2 \bar{T}_2^2)\right]^2 +$$

$$\left. + \left[2\bar{d}_2 \bar{T}_2 \Delta T_1 / (\bar{d}_1 \bar{T}_1^2 - \bar{d}_2 \bar{T}_2^2)\right]^2 \right\}^{1/2} ; \qquad \delta g = \Delta g / \bar{g}.$$

5. Графік залежності T_1 і T_2 від h.
6. Результати вимірювань та обчислень:

$$l = \bar{l} \pm \Delta l \; ; \quad d_1 = \bar{d}_1 \pm \Delta d_1 \; ; \quad d_2 = \bar{d}_2 \pm \Delta d_2 \; ;$$

№ п/п	n	t_{1i}	T_1	ΔT_1	t_{2i}	T_2	ΔT_2	g	Δg	δg%
1–5										
с зн.	10									

$$T_1 = \bar{T}_1 \pm \Delta T_1 ; \quad T_2 = \bar{T}_2 \pm \Delta T_2 .$$

7. Кінцевий результат:

$$g = \bar{g} \pm \Delta g ; \quad \delta g = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5.$$

8. Висновки.

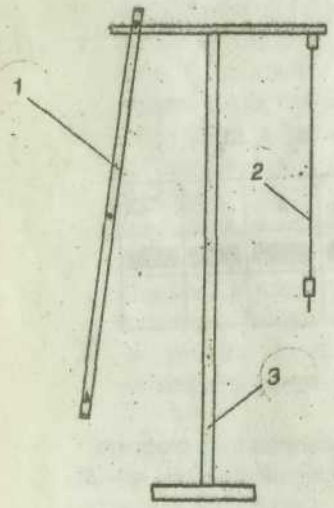
Лабораторна робота 116. ДОСЛІДНА ПЕРЕВІРКА ТЕОРЕМИ ГЮЙГЕНСА-ШТЕЙНЕРА

Завдання: дослідним шляхом перевірити теорему Гюйгенса-Штейнера.

Приладдя: штатив із пружним підвісом; симетричний фізичний маятник; тіла правильної геометричної форми (диск, трикутна та квадратна пластини); секундомір; технічна вага з набором важків; штангенциркуль.

Теоретичний матеріал: момент сили; момент інерції матеріальної точки та твердого тіла; момент імпульсу; рівняння моментів (основний закон динаміки обертального руху); теорема Гюйгенса-Штейнера; моменти інерції тіл правильної геометричної форми; фізичний маятник; крутильні коливання; період коливань фізичного та крутильного маятників.

Література: 1., §§ 21, 22-24, 31, 32, 34; 2, §§ 30, 32, 33, 35, 36, 41, 42, 53; 3, §§ 6.1-6.11, 9.1-9.7, 9.9; 4, §§ 5.1; 5, §§ 55, 124; 7, §§ 3.4, 5.4.



Опис установки. Лабораторна установка складається зі штатива 3, до якого прикріплені два кронштейни (див. рисунок). Перший кронштейн закінчується вилкою із заглибиною, в яку вставляють ребро металевої призми фізичного маятника *1*. До другого кронштейна прикріплений пружний підвіс *2* (сталева дротина), нижній кінець якої закінчується стержнем з гайкою. Справедливість теореми Гюйгенса-Штейнера перевіряють за допомогою фізичного маятника, що є однорідним стержнем, на кінцях якого симетрично до його центра мас (отвору в стержні) запресовані металеві тригранні призми. Підвішуючи на вилку першого кронштейна фізичний маятник, можна визначити його момент інерції відносно осі, яка проходить через ребро однієї з металевих призм, а прикріпивши маятник до пружного підвісу методом крутильних коливань можна визначити його момент інерції відносно осі, яка проходить через центр мас і є паралельною до попередньої осі.

Виведення робочих формул. Період коливання фізичного маятника (див. роботу 115) визначають з формули

$$T = 2\pi \sqrt{I/mgd} \quad , \qquad (1)$$

де I – момент інерції маятника відносно осі його підвісу; m – маса маятника; g – прискорення вільного падіння; d – відстань від осі підвісу до центра мас маятника.

Отже, вимірявши період коливань фізичного маятника T, його масу m та відстань d, можна обчислити момент інерції за формулою

$$I = mgdT^2/4\pi^2. \qquad (2)$$

Момент інерції I_o цього маятника відносно осі, яка проходить через його центр мас і паралельна до попередньої, можна експериментально визначити, застосовуючи крутильні коливання. Відомо (див. роботу 120), що період крутильних коливань

$$T_o = 2\pi \sqrt{I_o/b} \quad , \qquad (3)$$

де b – модуль кручення підвісу.
З формули (3)

$$I_o = \frac{bT_o^2}{4\pi^2} \quad . \qquad (4)$$

Щоб вилучити невідомий модуль кручення підвісу b, додатково вимірюють період T_1 крутильних коливань тіла правильної геометричної форми, момент інерції I_1 якого можна обчислити, знаючи масу і розміри. Аналогічно до формули (4) момент інерції додаткового тіла

$$I_1 = \frac{bT_1^2}{4\pi^2} \quad . \qquad (5)$$

З формул (4) і (5)

$$I_o = \frac{T_o^2}{T_1^2} I_1 \quad . \qquad (6)$$

Якщо допоміжним тілом є диск, то його момент інерції відносно осі симетрії, перпендикулярної до його площини,

$$I_1 = \frac{1}{2} m' R^2 = \frac{1}{8} m' D^2 \quad , \qquad (7)$$

де m' - маса диска; D - його діаметр.
Для квадратної пластинки відповідно

$$I_1 = \frac{1}{6} m' a^2 \quad , \qquad (8)$$

де a - довжина сторони квадрата.
Для трикутної пластинки

$$I_1 = \frac{1}{36} m' (a^2 + b^2 + c^2), \qquad (9)$$

де a, b, c - сторони трикутника.

Згідно з теоремою Гюйгенса-Штейнера момент інерції тіла I' відносно довільної осі обертання дорівнює моментові інерції I_o відносно паралельної осі, яка проходить через центр мас тіла, доданому до добутку маси тіла на квадрат відстані l між осями:

$$I' = I_o + ml^2. \qquad (10)$$

Цю теорему перевіряємо так. Підставимо у формулу (10) вираз (6) і обчислимо значення I'. Порівняємо це значення з обчисленим на основі експерименту за формулою (2) значенням I, тобто

$$I' = I \quad . \qquad (11)$$

Порядок виконання роботи

1. Визначте на технічній вазі маси фізичного маятника m і допоміжного тіла m', вказаного викладачем.
2. Вимірявте штангенциркулем відстань від ребра призми до центра мас (отвору) маятника $l = d$.
3. Вимірявте штангенциркулем геометричні розміри допоміжного тіла.
4. Вставте ребро призми маятника в жолобки вилки кронштейна, надайте маятнику коливального руху. Визначте час t десяти повних коливань.
5. Закріпіть маятник до пружного підвісу, надайте йому крутильних коливань, вимірявте час t_o десяти повних коливань.
6. Зніміть маятник, закріпіть на його місце допоміжне тіло і вимірявте час t_1 десяти повних коливань.
7. Усі вимірювання часу (t, t_o, t_1) повторіть п"ять разів. Результати вимірювань запишіть у таблицю. Обчисліть періоди T, T_o, T_1 та моменти інерції I_o, I, I'. Оцініть точність експерименту.
8. Перевірте теорему Гюйгенса-Штейнера. Зробіть відповідні висновки.

Контрольні запитання

1. Що називають моментом інерції матеріальної точки; системи матеріальних точок; твердого тіла?
2. Що називають фізичним маятником?
3. Запишіть рівняння динаміки коливань фізичного маятника та крутильних коливань.
4. Виведіть формули для періодів коливань фізичного та крутильного маятників.
5. Запишіть закон Гука для деформації кручення. Що називають модулем кручення?
6. Запишіть формулу основного закону динаміки обертального руху.
7. Сформулюйте теорему Гюйгенса-Штейнера.
8. Виведіть формули для моментів інерції диска та однорідного стержня відносно їхніх осей симетрії.

Форма звіту до лабораторної роботи 116

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робочі формули з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta I_o = \bar{I}_o\left[(\Delta I_1/\bar{I}_1)^2 + (2\Delta T_o/\bar{T}_o)^2 + (2\Delta T_1/\bar{T}_1)^2\right]^{1/2}; \quad \delta I_o = \Delta I_o/\bar{I};$$

$$\Delta I_1 = \bar{I}_1\left[(\Delta m'/\bar{m}')^2 + (2\Delta D/\bar{D})^2\right]^{1/2}; \quad \delta I_1 = \Delta I_1/\bar{I}_1;$$

$$\Delta I_1 = \bar{I}_1\left[(\Delta m'/\bar{m}')^2 + (2\Delta a/\bar{a})^2\right]^{1/2}; \quad \delta I_1 = \Delta I_1/\bar{I}_1;$$

$$\Delta I = \bar{I}\left[(\Delta m/\bar{m})^2 + (\Delta l/\bar{l})^2 + (2\Delta T/\bar{T})^2\right]^{1/2}; \quad \delta I = \Delta I/\bar{I};$$

$$\Delta I' = \left[(\Delta I_o)^2 + (\bar{l}^2\Delta m)^2 + (2\bar{m}\bar{l}\Delta l)^2\right]^{1/2}.; \quad \delta I' = \Delta I'/\bar{I}'.$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$$m = \bar{m} \pm \Delta m; \quad m' = \bar{m}' \pm \Delta m'; \quad a = \bar{a} \pm \Delta a; \quad l = \bar{l} \pm \Delta l; \quad D = \bar{D} \pm \Delta D;$$

№ п/п	n	t_{o1}	T_o	t_1	T	t_{11}	T_1	I_o	ΔI_o	δI_o%	I	ΔI	δI%	I'	$\Delta I'$	$\delta I'$%
1–5																
о/зн	10															

$$T_o = \bar{T}_o \pm \Delta T_o; \quad T = \bar{T} \pm \Delta T; \quad T_1 = \bar{T}_1 \pm \Delta T_1.$$

6. Кінцевий результат:

$$I' = \bar{I}' \pm \Delta I'; \quad \delta I' = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5;$$

$$I = \bar{I} \pm \Delta I; \quad \delta I = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5.$$

7. Висновки.

Лабораторна робота 117. **ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ МАЯТНИКА З РУХОМОЮ ТОЧКОЮ ПІДВІСУ**

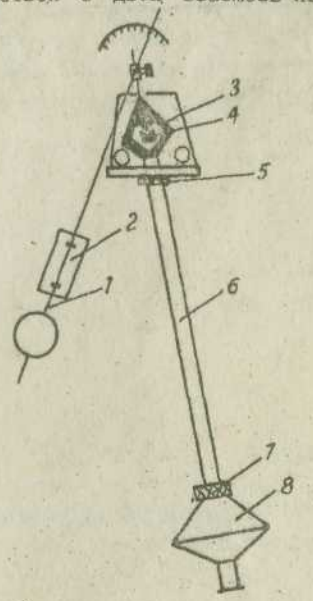
Завдання: дослідити амплітудну характеристику малого маятника, тобто залежність кута його відхилення α від частоти змушувальної сили (частоти коливань ω великого маятника) $\alpha = f(\omega)$ і побудувати графік такої залежності; одержати фазову характеристику вимушених коливань маятника з рухомою точкою підвісу.

Приладдя: лабораторна установка; секундомір.

Теоретичний матеріал: власні та вимушені коливання; додавання коливань; параметричні коливання; фізичний маятник; резонанс; неінерціальні системи відліку; сила інерції; момент сили; момент інерції.

Література: 1, §§ 27, 30, 34, 50–54; 2, §§ 39–42; 4, §§ 5.1–5.9; 5, §§ 123, 124, 126–128, 131, 136; 6, §§ 53, 54, 58, 60, 61.

Опис установки. Установка складається з двох взаємозв"язаних маятників: великого *6* і малого *1* (див. рисунок). Великий маятник складається зі штанги, по якій можна пересувати і закріплювати гайкою *7* масивну сочевицю *8*. Маятник *6* спирається ребром металевої призми *3* на кронштейн *4*. Ребро призми є віссю коливань великого маятника. Щоб запобігти зношуванню ребра призми, маятник арретують поворотом втулки *5* у неробочому положенні, а також при пересуванні та закріпленні сочевиці *8*. Зверху великий маятник закінчується стержнем, по якому пересувають і закріплюють вісь коливання малого маятника *1*. Такий маятник – це металева спиця з легкою кулькою. На спиці можна кріпити прапорець *2*, поворотом якого змінюють силу опору.



Виведення робочих формул. Вимушені коливання виникають унаслідок зовнішнього періодичного впливу на коливну систему. У випадку коливання фізичного маятника рівняння його руху в інерціальній системі відліку має вигляд

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k\alpha - h\frac{d\alpha}{dt} + M_o \sin \omega t, \qquad (1)$$

де I – момент інерції маятника; α – кут його зміщення; $d\alpha/dt$ – кутова швидкість; $d^2\alpha/dt^2$ – кутове прискорення маятника; k – коефіцієнт моменту сил пружності; h – коефіцієнт моменту сил тертя; M_o – амплітуда моменту зовнішньої сили; ω – циклічна частота моменту зовнішньої сили.

Загальний розв"язок рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\alpha = A\, e^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \varphi_o) + \alpha_o \sin(\omega t + \varphi_o), \qquad (2)$$

де $\omega_1 = \left(\frac{k}{I} - \frac{h^2}{I^2}\right)^{1/2}$; δ – коефіцієнт згасання; φ_o – початкова фаза коливання.

Перший член виразу (2) описує власні згасаючі коливання, другий – вимушені незгасаючі. З часом власні коливання з амплітудою A_o і початковою фазою φ_o згасають і тривають тільки вимушені коливання

$$\alpha = \alpha_o \sin(\omega t + \varphi_o) \qquad (3)$$

з амплітудою

$$\alpha_o = \frac{M_o}{I\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \qquad (4)$$

та зсувом фаз

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\omega\delta}{(\omega_o^2 - \omega^2)}\,. \qquad (5)$$

де $\delta = \frac{h}{2I}$; $\omega_o^2 = \frac{k}{I} = \omega_1^2 + \delta^2$.

Амплітуда зростає зі збільшенням циклічної частоти ω, досягає максимального значення (при резонансі), після чого починає змен-

шуватися. Кут зсуву фаз збільшується зі зростанням ω (від 0 до $+\pi$), маючи під час резонансу значення $\pi/2$.

У цій роботі розглядають малі коливання фізичного маятника, точка підвісу якого коливається по горизонталі. У цьому випадку крім звичайних моментів сил треба врахувати моменти сил інерції $-ml\,d^2x/dt^2$, (m – маса маятника; l – відстань від точки підвісу до центра мас маятника, d^2x/dt^2 – прискорення руху точки підвісу в інерціальній системі координат).

Нехай точка підвісу рухається за законом

$$x = b \sin \omega t\,, \qquad (7)$$

де b – амплітуда зміщення точки підвісу малого маятника. Момент сили інерції, прикладений до маятника, за абсолютним значенням

$$M = ml b\omega^2 \sin \omega t\,. \qquad (8)$$

Тепер рівняння руху маятника матиме вигляд

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k\alpha - h\frac{d\alpha}{dt} + ml b\omega^2 \sin \omega t\,. \qquad (9)$$

Закони руху маятника приводять після згасання його власних коливань до вимушених коливань

$$\alpha = \alpha_o \sin(\omega t + \varphi) \qquad (10)$$

з амплітудою

$$\alpha_o = \frac{ml b\omega^2}{I\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \qquad (11)$$

та зсувом фаз

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\omega\delta}{\omega_o^2 - \omega^2}\,. \qquad (12)$$

Порядок виконання роботи

1. Визначте циклічну частоту ω_1 власних коливань малого маятника, а також час t_o, за який вони повністю згасають. Для цього при нерухомому великому маятнику відхиліть малий маятник на кут $10\text{–}12^0$ і вимірявте час п"яти повних коливань t_1. Час t_o вимірюйте до цілковитої зупинки маятника.
2. Визначте коефіцієнт згасання δ власних коливань малого маятника. Для цього вимірявте час τ кількості n його коливань, протягом яких амплітуда зменшується від α_1 до α_2. Коефіцієнт згасання обчисліть за формулою

$$\delta = \frac{1}{\tau} \ln \frac{a_1}{a_2} = \frac{2{,}3}{\tau} \lg \frac{a_1}{a_2} . \qquad (13)$$

3. Дослідіть амплітудну характеристику коливань малого маятника як функцію циклічної частоти коливань великого маятника. Для цього, закріплюючи сочевицю 8 по черзі в кожній із семи вказаних точок та відхиляючи маятник 6 на кут $5°$, вимірйте час t десяти його повних коливань. Після часу, більшого від t_o, вимірйте амплітуду a_o вимушених коливань малого маятника 1. Для кожного положення сочевиці вимірювання повторіть тричі, обчисліть середні значення $\bar{a}_o$ та $\bar{\omega}$, побудуйте графік залежності $\bar{a}_o = \phi(\bar{\omega})$. При $\bar{\omega} \approx \bar{\omega}_o$ (резонанс) коливання малого маятника перестають бути *лінійними* ($\sin \alpha \neq \alpha$).
4. Дослідіть фазову характеристику коливань маятників. Переконайтеся, виконуючи пункт 3, що у випадку, якщо $\omega \ll \omega_1$, зміщення малого маятника 6 практично у фазі зі зміщенням точки підвісу. Зсув фаз у цьому випадку близький до нуля ($\varphi \to 0$). При великих частотах ($\omega \gg \omega_1$) зміщення малого маятника 6 у протифазі зі зміщенням точки підвісу, тобто зсув фаз близький до $-\pi$ ($\varphi \to -\pi$). Отже, границі значень $(0, -\pi)$ кута зсуву фаз повністю відповідають формулі

$$tg\,\varphi = -\frac{2\omega\delta}{\omega^2 - \omega_o^2} = -\frac{2\omega\delta}{\omega^2 + \delta_1^2 - \omega^2} . \qquad (14)$$

Знаючи ω_1 і δ_1, обчисліть за наведеною формулою інші значення кута зсуву фаз. Обчислення виконайте для семи частот: резонансної і для трьох частот на висхідній і низхідній вітках амплітудної характеристики. Обчислені значення кута зсуву фаз наведіть у вигляді графічної залежності, відкладаючи по осі абсцис циклічну частоту коливань великого маятника, а по осі ординат - кут зсуву фаз $\varphi = \phi(\omega)$.

Контрольні запитання

1. Які коливання називаються гармонічними ?
2. Що таке явище резонансу?
3. Нарисуйте сім"ю резонансних кривих для різних коефіцієнтів згасання.
4. Запишіть диференціальне рівняння вимушених коливань.

5. Від яких величин залежить значення резонансної амплітуди?
6. Дайте визначення неінерціальної системи відліку та сили інерції.
7. Виведіть формулу для періоду коливань фізичного маятника.
8. Напишіть рівняння згасаючих коливань і його розв"язок.
9. Що називають моментом інерції твердого тіла?
10. Сформулюйте і запишіть основний закон обертального руху.

Форма звіту до лабораторної роботи 117

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робочі формули з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta\omega_1 = \bar{\omega} \frac{\Delta t_1}{\bar{t}_1} ; \quad \Delta\omega = \bar{\omega} \frac{\Delta t}{\bar{t}} ; \quad \Delta\delta = \bar{\delta} \frac{\Delta\tau}{\bar{\tau}} .$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

№ п/п	n	$t_{1\,i}$	ω_1	$\Delta\omega_1$	$\delta\omega_1$ %	$t_{o\,i}$	a_1	a_2	τ	δ	$\Delta\delta$	$\delta\delta$ %
1-5												
с/зн												

№ п/п	n	t	ω	a_o	$tg\,\varphi$	φ
1-7						
с/зн						

6. Кінцеві результати:

$$\omega_1 = \bar{\omega}_1 \pm \Delta\omega_1 ; \quad \delta\omega_1 = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5;$$

$$\delta = \bar{\delta} \pm \Delta\delta ; \quad \delta\delta = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5.$$

7. Графіки залежностей $\bar{a}_o = f(\omega)$ і $\varphi = \psi(\omega)$.
8. Висновки.

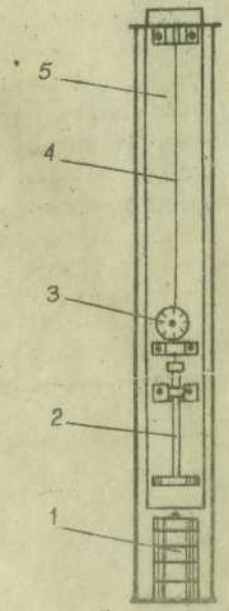
Лабораторна робота 118. **ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ПРУЖНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ РОЗТЯГУ ДРОТИНИ**

Завдання: дослідити процес пружної деформації дротини за вимірюваннями її абсолютного видовження; обчислити модуль Юнга та об"ємну густину енергії.

Приладдя: установка для вимірювання деформації дротини; лінійка або рулетка; мікрометр.

Теоретичний матеріал: деформація твердих тіл; закон Гука; модуль Юнга; границі пружності та міцності; діаграма розтягу; пластичні деформації.

Література: 2, §§ 73-75, 77; 5, §§ 81-86; 6, §§ 14, 25.



Опис установки. Установка для вимірювання абсолютного видовження тіл (дротини) під час деформації розтягу складається з шини 5, до якої прикріплені три кронштейни (див. рисунок). До верхнього кронштейна кріпиться один кінець дротини 4; другий її кінець закріплений у штоці 2, який проходить через направляючу втулку нижнього кронштейна і закінчується платформою для установки тягарів. До середнього кронштейна прикріплено індикатор 3, яким вимірюють абсолютне видовження. Для того, щоб забезпечити рівномірне навантаження верхнього кронштейна під час виконання роботи (позбутися його деформації), до нього на двох штангах прикріплено платформу, на якій є тягарі 1.

Виведення робочих формул. Нехай l_0 – довжина недеформованої дротини. Якщо до дротини прикласти силу F, то дротина видовжиться на Δl, і її довжина $l = l_0 + \Delta l$. Відношення $\varepsilon = \Delta l / l_0$ називається відносним видовженням. Для малих деформацій виконується закон Гука $\sigma = E\varepsilon$, де $\sigma = F/s$ – напруження (сила, віднесена до одиниці площі поперечного перерізу), E – стала, яка залежить від матеріалу та його фізичного стану. Величину E називають модулем Юнга. З наведених вище формул для модуля Юнга

$$E = Fl_0 / s\Delta l \,. \qquad (1)$$

Враховуючи, що $s = \pi d^2/4$, а $F = P = mg$, одержимо робочу формулу

$$E = 4mgl_0 / \pi d^2 \Delta l \,. \qquad (2)$$

Виведемо формулу для обчислення густини енергії пружного розтягу. Для того, щоб деформувати тіло, потрібно виконати над ним роботу. Відповідно деформоване тіло саме може виконати роботу, оскільки воно має запас потенціальної енергії. Ця енергія називається пружною. Обчислимо енергію розтягнутої дротини. Прикладемо до дротини силу $f(x)$ і будемо повільно збільшувати її від початкового значення $f = 0$ до кінцевого $f = F$. Під час цього відбувається видовження дротини від $x = 0$ до $x = \Delta l$. За законом Гука $f(x) = kx$, де k – коефіцієнт пружності, який можна виразити через модуль Юнга $k = Es/l_0$. Уся робота в нашому випадку витратиться на приріст пружної енергії

$$U = \int_0^{\Delta l} f(x)dx = k\int_0^{\Delta l} x\,dx = \frac{1}{2}k\Delta l^2. \qquad (3)$$

Оскільки в кінці розтягу $x = \Delta l$, то $F = f(\Delta l) = k\Delta l$. Враховуючи це, отримаємо

$$U = \frac{1}{2} F\Delta l. \qquad (4)$$

Визначимо об"ємну густину пружної енергії, тобто пружну енергію, яка припадає на одиницю об"єму деформованої дротини. Для цього ліву та праву частини виразу (4) розділимо на об"єм дротини $V = sl$:

$$u = \frac{U}{sl} = \frac{F\Delta l}{2sl} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} \,. \qquad (5)$$

Скориставшись законом Гука у вигляді $\sigma = \varepsilon E$ і формулою (2), отримуємо

робочу формулу для об"ємної густини пружної енергії

$$u = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{2P\Delta l}{\pi d^2 l_o} = \frac{2mg\Delta l}{\pi d^2 l_o} . \qquad (6)$$

Порядок виконання роботи

1. Виміряйте в декількох місцях мікрометром діаметр дротини.
2. Виміряйте довжину дротини за допомогою лінійки або рулетки.
3. Встановіть стрілку індикатора у нульове положення (повертаючи його шкалу).
4. З платформи рівномірного навантаження кронштейна беріть по одному тягарцю і навантажуйте ними платформу штока деформації дротини. Індикатором виміряйте абсолютні видовження дротини для кожного навантаження. Вимірювання повторіть п"ять разів.
5. За робочою формулою обчисліть модуль Юнга та об"ємну густину пружної енергії для п"яти значень напружень.
6. Побудуйте графік залежності об"ємної густини енергії u від деформуючої сили mg.
7. Оцініть точність виконаних вимірювань та обчислень. Зробіть відповідні висновки.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте закон Гука.
2. Що називають напруженням; абсолютним та відносним видовженнями?
3. Який фізичний зміст модуля Юнга?
4. Що таке межа пружності та міцності?
5. Нарисуйте типовий хід діаграми деформації розтягу.
6. Що таке залишкова деформація?
7. Виведіть вираз для енергії пружно деформованого стержня.
8. Який зв"язок між модулем пружності та коефіцієнтом Пуассона?
9. Як визначити роботу змінної сили?

Форма звіту до лабораторної роботи 118

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робочі формули з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta E = \bar{E}\left\{[\Delta m/\bar{m}]^2+[\Delta l_o/\bar{l}_o]^2+[2\Delta d/\bar{d}]^2+[\Delta(\Delta l)/\overline{\Delta l}]^2+[\Delta g/g]^2\right\}^{1/2}; \quad \delta E = \Delta E/\bar{E};$$

$$\Delta u = \bar{u}\left\{[\Delta m/\bar{m}]^2+[\Delta l_o/\bar{l}_o]^2+[2\Delta d/\bar{d}]^2+[\Delta(\Delta l)/\overline{\Delta l}]^2+[\Delta g/g]^2\right\}^{1/2}; \quad \delta u = \Delta u/\bar{u}.$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$$d = \bar{d} \pm \Delta d; \quad l_o = \bar{l}_o \pm \Delta l_o; \quad g = (9{,}81 \pm 0{,}01)\text{м/с}^2;$$

№ п/п	m_1, кг	$\Delta l_{1\,i}$, м	E_1, Па	ΔE_1, Па	δE_1 %	u_1, Па	Δu_1, Па	δu_1 %
1-5								
с/зн	1,0							

$$m_1 = \bar{m}_1 \pm \Delta m_1; \qquad \Delta l_1 = \overline{\Delta l}_1 \pm \Delta(\Delta l_1).$$

Аналогічно для 2, 3, 4, 5 кг.

6. Кінцеві результати:

$$E_1 = \bar{E}_1 \pm \Delta E_1; \quad \delta E_1 = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5;$$

$$u_1 = \bar{u}_1 \pm \Delta u_1; \quad \delta u_1 = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5.$$

Аналогічно для E_2, E_3, E_4, E_5 та результуючого E_p, а також для u_2, u_3, u_4, u_5.

7. Графік залежності $u = f(mg)$.

8. Висновки.

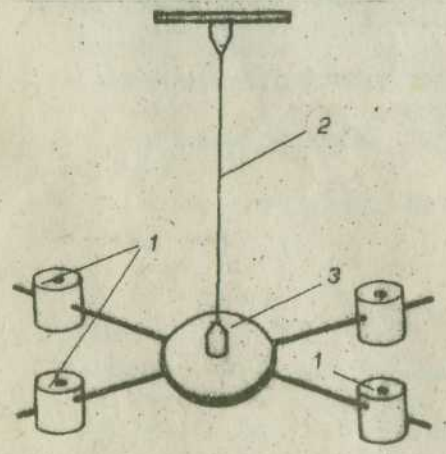
Лабораторна робота 120. **ВИЗНАЧЕННЯ МОДУЛЯ ЗСУВУ ДИНАМІЧНИМ МЕТОДОМ**

Завдання: визначити модуль зсуву.

Прилади: крутильний маятник; технічна вага; секундомір; лінійка; мікрометр.

Теоретичний матеріал: деформація твердих тіл; деформація кручення та зсуву; закон Гука; модуль зсуву; модуль кручення; момент сили; момент інерції; крутильні коливання.

Література: 1, §§ 21, 31, 32, 34; 2, §§ 30, 33, 42, 77-80; 3, §§ 6.1-6.11, 9.4, 9.6, 9.7; 4, §§ 1, 5.1, 5.4; 5, §§ 81-86; 6, §§ 14, 25, 30, 32, 39; 7, § 2.3.



Опис установки. Установка для визначення модуля зсуву динамічним методом складається з підставки, до верхнього кронштейна якої нерухомо підвішений тонкий стержень *2* з досліджуваного матеріалу (див. рисунок). До нижнього кінця стержня прикріплена хрестовина *3*, на яку можна встановити і закріпити на різних відстанях від осі стержня додаткові вантажі *1*.

Виведення робочої формули. Якщо до стержня прикласти пару сил з моментом сили M, направленим уздовж осі стержня, то він здеформується так, що його нижня основа повернеться відносно верхньої на кут φ. Деформація кручення аналогічна деформації зсуву. Якщо умовно розбити стержень на елементарні шари, перпендикулярні до його осі, то закручування спричинить зсув кожного шару щодо сусідніх. Зсув буде неоднорідним, оскільки він залежить від відстані до осі. Залежність кута закручування від довжини стержня

L, його радіуса r, пружних властивостей і обертального моменту сили M виражають співвідношенням

$$\varphi = 2LM/\pi r^4 N , \qquad (1)$$

де $N = P/S\varphi$ – модуль зсуву, який визначає величину дотичної напруги при одиничному відносному зсуві.

Позначивши сталий множник при M через c, отримаємо закон Гука для деформації кручення

$$\varphi = cM . \qquad (2)$$

Величина, обернена до c, називається модулем кручення:

$$b = 1/c = M/\varphi . \qquad (3)$$

Між модулем кручення і модулем зсуву існує залежність

$$b = \pi r^4 N/2L. \qquad (4)$$

Якщо хрестовині маятника надати крутильних коливань, то їх можна описати основним законом обертального руху

$$M = I\varepsilon , \qquad (5)$$

де M – обертальний момент; $\varepsilon = d^2\varphi/dt^2$ – кутове прискорення. Використавши формулу (3), основний закон обертального руху можна записати у вигляді

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} - b\varphi = 0 . \qquad (6)$$

З цього рівняння випливає, що кутове прискорення пропорційне зміщенню φ і направлене в протилежний від нього бік. Розв"язком цього рівняння є гармонічна функція

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t , \qquad (7)$$

де

$$\omega = \sqrt{b/I} . \qquad (8)$$

Враховуючи, що $\omega = 2\pi/T$, отримаємо формулу для періоду крутильних коливань

$$T = 2\pi\sqrt{I/b}\,. \qquad (9)$$

Для того, щоб вилучити з цієї формули невідомий момент інерції коливальної системи, діють так. Нехай маємо значення двох різних моментів інерції системи I_1 і I_2, яким відповідають періоди коливань T_1 і T_2. Тоді, враховуючи формулу (9), отримаємо

$$T_1^2/T_2^2 = I_1/I_2\,. \qquad (10)$$

Момент інерції крутильного маятника можна виразити через момент інерції хрестовини і стержня I_o плюс момент інерції чотирьох додаткових вантажів, розміщених на відстані l від центра хрестовини. Якщо під час вимірювання T_1 вантажі були на відстані l_1 від центра хрестовини, а під час вимірювання T_2 на відстані l_2, то згідно з теоремою Гюйгенса-Штейнера

$$I_1 = 4ml_1^2 + I_o + I_o';$$

$$I_2 = 4ml_2^2 + I_o + I_o',$$

де I_o' – сума моментів інерції чотирьох тіл масою $4m$ відносно осей, які проходять через їхні центри мас. Із наведених рівнянь

$$I_2 - I_1 = 4m(l_2^2 - l_1^2)\,. \qquad (11)$$

Підставивши в цей вираз значення I_2 з формули (10), одержимо

$$I_1 = \frac{4mT_1^2(l_2^2 - l_1^2)}{T_2^2 - T_1^2}\,. \qquad (12)$$

З іншого боку, згідно з формулою (9)

$$I_1 = bT_1^2/4\pi^2. \qquad (13)$$

Прирівнявши (12) і (13), одержимо

$$b = \frac{16\pi m(l_2^2 - l_1^2)}{T_2^2 - T_1^2}\,. \qquad (14)$$

Враховуючи зв"язок між модулем кручення b і модулем зсуву N (формула (4)), отримаємо робочу формулу

$$N = \frac{32\pi Lm(l_2^2 - l_1^2)}{r^4(T_2^2 - T_1^2)}\,. \qquad (15)$$

Порядок виконання роботи

1. Виміряйте довжину стержня лінійкою.
2. Виміряйте мікрометром діаметр стержня в декількох місцях і визначте його середній радіус.
3. Виміряйте час t_1 десяти повних крутильних коливань маятника, якщо вантажі є на відстані l_1 від осі хрестовини. Обчисліть період коливань $T_1 = t_1/10$.
4. Виконайте аналогічні вимірювання, якщо вантажі розташовані на відстані l_2.
5. Обчисліть модуль зсуву за формулою (15). Оцініть точність одержаних результатів.

Контрольні запитання

1. Назвіть типи деформацій.
2. Що називають відносним зсувом?
3. Яку величину називають модулем зсуву?
4. Запишіть вираз закону Гука для деформації зсуву та кручення.
5. Який зв"язок існує між модулем кручення та зсуву?
6. Що називають моментом сили та моментом інерції?

7. Що називають крутильними коливаннями; від чого залежить їхній період?
8. Сформулюйте основний закон обертального руху та запишіть його математичний вираз.
9. Виведіть робочу формулу.

Форма звіту до лабораторної роботи 120

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робоча формула з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta N = \bar{N}\left\{[\Delta m/\bar{m}]^2 + [2\bar{l}_2\Delta l_2/(\bar{l}_2^2-\bar{l}_1^2)]^2 + [2\bar{l}_1\Delta l_1/(\bar{l}_2^2-\bar{l}_1^2)]^2 + [2\bar{T}_1\Delta T_1/(\bar{T}_2^2-\bar{T}_1^2)]^2 + [2\bar{T}_2\Delta T_2/(\bar{T}_2^2-\bar{T}_1^2)]^2 + [4\Delta r/\bar{r}]^2 + [\Delta L/\bar{L}]^2\right\}^{1/2};$$

$$\delta N = \Delta N/\bar{N}.$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$L = \bar{L} \pm \Delta L$; $m = \bar{m} \pm \Delta m$; $r = \bar{r} \pm \Delta r$; $l_1 = \bar{l}_1 \pm \Delta l_1$; $l_2 = \bar{l}_2 \pm \Delta l_2$;

№ п/п	n	t_{1i} с	T_1 с	t_{2i} с	T_2 с	N Н/м²	ΔN Н/м²	δN %
1-5								
с/зн	10							

$T_1 = \bar{T}_1 \pm \Delta T_1$; $\delta T_1 =$; $T_2 = \bar{T}_2 \pm \Delta T_2$; $\delta T_2 =$.

6. Кінцевий результат:

$$N = \bar{N} \pm \Delta N; \quad \delta N = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5.$$

7. Висновки.

Лабораторна робота 120А. **ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ПРУЖНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ КРУЧЕННЯ**

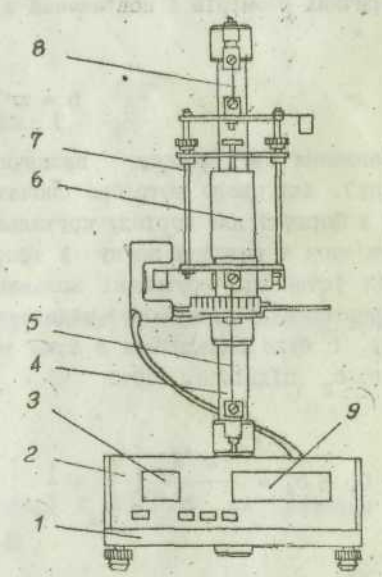
Завдання: визначити модуль зсуву.

Приладдя: лабораторна установка; мікрометр; штангенциркуль; технічна вага з набором важків; циліндр або інше тіло правильної геометричної форми.

Теоретичний матеріал: деформації твердих тіл, зокрема кручення та зсуву; закон Гука; модуль зсуву; модуль кручення; момент сили; момент інерції; основний закон обертального руху; крутильні коливання; період крутильних коливань.

Література: 1, §§ 21, 31, 32, 34; 2, §§ 73-75, 77-80; 3, §§ 6.1-6.11, 9.1, 9.4, 9.6. 9.9; 4, §§ 1, 5.1, 5.4; 5, §§ 81-86; 6, §§ 14, 25, 30, 32, 39; 7, § 2.3.

Опис установки. Модуль зсуву визначають за допомогою крутильного маятника (див. рисунок). На основі *1* з чотирма ніжками, висоту яких можна регулювати, закріплені колонка *4* та електронний блок *2*, який складається з мілісекундоміра *9*, лічильника періодів *3*, кнопок керування. На колонці закріплені три кронштейни. Верхній та нижній кронштейни мають затискачі, якими закріплюють сталеві підвіси *5*, *8* з рамкою *7*. На середньому кронштейні розміщена сталева плита, що є підставкою для фотоелектронного датчика, електромагніта та кутової шкали.



Конструкція рамки дає змогу закріплювати в ній тіло *6* правильної геометричної форми. Тіло закріплюють за допомогою рухомої поперечної балки, яку можна переміщувати по нерухомих стержнях і фіксувати

затискачами та гвинтом.

Час та кількість повних коливань рамки вимірюють в автоматичному режимі. Світловий потік від лампочки падає на фототранзистор: під час коливань крутильного маятника стрілка рамки перериває світловий потік, унаслідок чого в схемі транзистора генеруються електричні імпульси, які після підсилення у схемі транзистора подаються на вхід мілісекундоміра.

. **Виведення робочої формули.** Як відомо (див. виведення робочої формули до роботи 120), період крутильних коливань

$$T = 2\pi\sqrt{I/b} \quad , \qquad (1)$$

де I - момент інерції крутильного маятника; b - модуль кручення підвісу крутильного маятника, який залежить від матеріалу та геометричних розмірів і пов"язаний з модулем зсуву N співвідношенням

$$b = \pi r^4 N/2L \quad . \qquad (2)$$

Завдання цієї роботи - визначити модуль зсуву сталевої дротини (підвісу). Для цього потрібно спочатку визначити модуль кручення b , який є у формулі для періоду крутильних коливань (1), і, використавши його зв"язок з модулем зсуву N (формула (2)), визначити останній. У нашій установці крутильні коливання виконує рамка, закріплена на двох (верхньому та нижньому) підвісах. У цьому випадку модуль кручення підвісу b буде складатися з суми модулів кручення верхнього b_1 і нижнього b_2 підвісів, тобто

$$b = b_1 + b_2 = \frac{\pi r^4 N}{2}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) = \frac{\pi d^4 N (L_1+L_2)}{32\, L_1 L_2} \quad , \qquad (3)$$

де L_1, L_2 - відповідно довжина верхньої та нижньої частин підвісу; d - його діаметр.

Період крутильних коливань рамки буде визначатись формулою

$$T = 2\pi\sqrt{I/b} \quad , \qquad (4)$$

де I - невідомий момент інерції рамки; b - сумарний модуль кручення підвісів.

Щоб вилучити I, у рамку закріплюють тіло з відомим моментом інерції I_1 (у нашому випадку - циліндр, момент інерції якого можна обчислити за формулою $I_1 = mD^2/8$, де m - маса; D - діаметр циліндра). Тепер період крутильних коливань системи "рамка + циліндр"

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I+I_1}{b}} \quad . \qquad (5)$$

Піднесемо до квадрата формули (4) і (5) та розділимо їх почленно:

$$\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{I+I_1}{I} = 1 + \frac{I_1}{I} \quad ;$$

$$\frac{I_1}{I} = \frac{T_1^2 - T^2}{T^2} \quad , \text{ звідки } I = \frac{I_1 T^2}{T_1^2 - T^2} \quad .$$

З формули (4)

$$I = b\,\frac{T^2}{4\pi^2} \quad .$$

Прирівнявши два останні вирази, вилучимо невідомий момент інерції рамки:

$$b = \frac{4\pi^2 I_1}{T_1^2 - T^2} \quad . \qquad (6)$$

Підставивши в формулу (6) вираз для $I_1 = mD^2/8$ та значення b з формули (3), одержимо робочу формулу

$$N = \frac{16mD^2\pi\, L_1 L_2}{d^4(L_1 + L_2)\,(T_1^2 - T^2)} . \qquad (7)$$

Порядок виконання роботи

1. Під"єднайте установку до електромережі та натисніть кнопку "Сеть".
2. Відпустіть кнопку "Пуск" 1, повертаючи рамку, притисніть її до електромагніта, який зафіксує її в цьому положенні.
3. Натисніть кнопку "Сброс" (обнуліть мілісекундомір та лічильник кількості коливань).
4. Натисніть кнопку "Пуск". Унаслідок цього електромагніт відпустить рамку, яка почне виконувати крутильні коливання та ввімкне мілісекундомір і лічильник кількості коливань.
5. Стежте за показом лічильника кількості коливань. Коли на лічильнику з"явиться цифра 9, натисніть кнопку "Стоп". Через одне коливання припиниться вимірювання. На лічильнику кількості коливань з"явиться цифра 10 , а на мілісекундомірі час t , за який рамка здійснила ці коливання.
6. Операції, описані в пунктах 2-5, повторіть п"ять разів, одержавши п"ять значень часу t.
7. Закріпіть у рамці циліндр і п"ять разів вимірйте час десяти коливань рамки з циліндром t_1 /див. пункти 2-5/.
8. Штангенциркулем вимірйте довжину верхньої L_1 і нижньої L_2 частин підвісу, а мікрометром його діаметр d.
9. На технічній вазі визначте масу циліндра m, а штангенциркулем вимірйте його діаметр D .
10. За даними вимірювань обчисліть середні значення періодів T_1 і T, середнє значення модуля зсуву підвісу та оцініть точність одержаного результату.

Контрольні запитання

1. Назвіть типи деформацій.
2. Що називається відносним зсувом?
3. Яка величина називається модулем зсуву?
4. Запишіть вираз закону Гука для деформацій зсуву та кручення.
5. Який зв'язок існує між модулями кручення та зсуву?
6. Що називається моментом сили та моментом інерції?

7. Запишіть та сформулюйте основний закон обертального руху.
8. Що визначає період крутильних коливань?
9. Виведіть робочу формулу.

Форма звіту до лабораторної роботи І20А

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робоча формула з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta N = \bar{N}\left\{ [\Delta m/\bar{m}]^2 + [2\Delta D/\bar{D}]^2 + [4\Delta d/\bar{d}]^2 + [2\bar{T}_1\Delta T_1/(\bar{T}_1^2-\bar{T}^2)]^2 + \right.$$

$$\left. + [2\bar{T}\Delta T/(\bar{T}_1^2-\bar{T}^2)]^2 + [\bar{L}_2\Delta L_1/\bar{L}_1(\bar{L}_1+\bar{L}_2)]^2 + [\bar{L}_1\Delta L_2/\bar{L}_2(\bar{L}_1+\bar{L}_2)]^2 \right\}^{1/2} ;$$

$$\delta N = \Delta N/\bar{N} .$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$m = \bar{m} \pm \Delta m$; $D = \bar{D} \pm \Delta D$; $d = \bar{d} \pm \Delta d$; $L_1 = \bar{L}_1 \pm \Delta L_1$; $L_2 = \bar{L}_2 \pm \Delta L_2$;

№ п/п	n	t_{1i} с	T_1 с	t_i с	T с	N Па	ΔN Па	δN %
1-5								
с/зн	10							

$T_1 = \bar{T}_1 \pm \Delta T_1$; $\delta T_1 =$; $T = \bar{T} \pm \Delta T$; $\delta T =$.

6. Кінцевий результат:

$N = \bar{N} \pm \Delta N$; $\delta N =$; $p =$; $n = 5$.

7. Висновки.

Лабораторна робота 121. **ПЕРЕВІРКА ТЕОРЕМИ ГЮЙГЕНСА-ШТЕЙНЕРА ЗА ДОПОМОГОЮ ТРИФІЛЯРНОГО ПІДВІСУ**

Завдання: перевірити теорему Гюйгенса-Штейнера.

Приладдя: трифілярний підвіс; два циліндри; вага; секундомір.

Теоретичний матеріал: момент сили; момент інерції матеріальної точки та твердого тіла; центр мас; теорема Гюйгенса-Штейнера; основний закон динаміки обертального руху; кінетична енергія обертального руху; закон збереження механічної енергії; гармонічні коливання та їхні характеристики; крутильні коливання трифілярного підвісу та їхній період.

Література: 1, §§ 21-25, 31-34, 50, 51; 2, §§ 24, 30-33, 35-37, 39, 40, 42; 3, §§ 5.1, 7.12, 6.1-6.8, 9.2-9.7; 4, §§ 5.1-54; 5, §§ 55, 124; 7, §§ 3.4, 5.4.

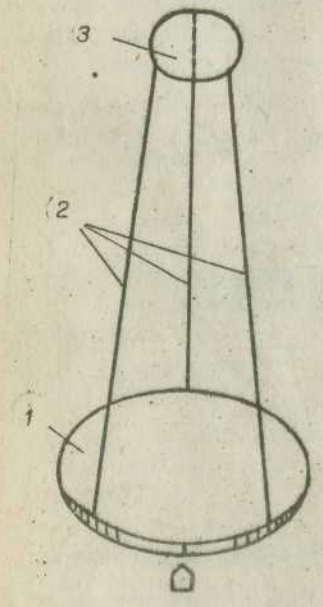


Рис. 1.

Опис установки. Момент інерції тіла довільної форми можна виміряти за допомогою трифілярного підвісу (рис. 1). Трифілярний підвіс – це кругла плоска платформа *1* у вигляді диска радіусом R, підвішена на трьох симетрично розміщених по вершинах рівнобічного трикутника нитках *2* довжиною l. Верхні кінці ниток закріплені до невеликого диска *3* радіусом r, який кріплять до спеціального кронштейна, вмонтованого в стіну. Під час повороту верхнього диска на невеликий кут α навколо вертикальної осі, перпендикулярної до площини диска, усі три нитки набувають нахиленого положення, центр мас платформи трохи піднімається по осі обертання і вона починає виконувати крутильні коливання, період яких залежить від моменту інерції платформи. Платформі надають коливального руху поворотом верхнього диска за допомогою шнура, який приводить у рух важіль, зв"язаний з верхнім диском. При

цьому платформа виконує крутильні коливання навколо вертикальної осі без коливань, подібних до плоских коливань маятника, які утруднюють вимірювання.

Виведення робочих формул. Платформа масою m_0, повертаючись на трифілярному підвісі, вертикально коливається. Вона піднімається за чверть періоду на висоту h. Потенціальна енергія, що її одержала платформа протягом наступної чверті періоду, переходить у кінетичну енергію обертального руху і це повторюватиметься через кожну чверть періоду крутильних коливань. Нехтуючи тертям, запишемо закон збереження механічної енергії:

$$m_0 g h = \frac{1}{2} I_0 \omega_{max}^2 , \qquad (1)$$

де g – прискорення вільного падіння; I_0 – момент інерції платформи; ω_{max} – максимальна кутова швидкість платформи (під час її проходження через положення рівноваги).

Кутову швидкість платформи можна визначити, продиференціювавши рівняння, яке описує кутове зміщення платформи під час її крутильних коливань:

$$\alpha = \alpha_0 \sin \frac{2\pi}{T_0} t . \qquad (2)$$

Тоді $\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{T_0} \alpha_0 \cos \frac{2\pi}{T_0} t$, звідки $\omega_{max} = \frac{2\pi\alpha_0}{T_0}$. (3)

Повертання платформи на кут α_0 навколо осі OO_1 відповідає її підніманню на висоту h (рис. 2):

$$h = O_1O_2 = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2-(BC_1)^2}{BC+BC_1} .$$

Позначимо через l довжину ниток, а через R і r відповідно відстань від точок їхнього кріплення на платформі та диску до осі обертання OO_1. З трикутника ABC і A_1BC_1 одержимо таке співвідношення:

$$(BC)^2 = (AB)^2-(AC)^2 = l^2-(R-r)^2;$$

$$(BC_1)^2 = (A_1B)^2-(A_1C_1)^2 = l^2-(R^2+r^2-2Rr\cos\alpha) .$$

Отже, висота підняття платформи

$$h = \frac{2Rr(1-\cos\alpha_0)}{BC+BC_1} = \frac{2Rr\ 2\sin^2\frac{\alpha_0}{2}}{BC+BC_1} .$$

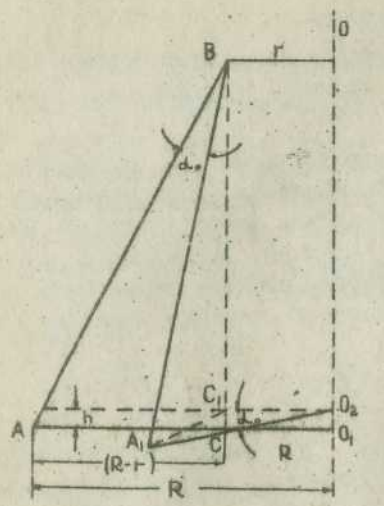


Рис. 2.

Якщо довжина ниток значна і кути відхилення платформи малі, то можна вважати, що

$$BC = BC_1 = l \quad і \quad \sin\frac{\alpha_o}{2} = \frac{\alpha_o}{2} .$$

Тоді, щоб визначити h, одержуємо формулу

$$h = \frac{Rr\alpha_o^2}{2l} . \qquad (4)$$

З формул (1), (3) і (4) визначаємо вираз для обчислення моменту інерції ненавантаженої платформи трифілярного підвісу

$$I_o = \frac{m_o gRr}{4\pi^2 l} T_o^2 . \qquad (5)$$

Платформа, навантажена досліджуваним тілом масою m, буде коливатися з періодом T, а момент інерції системи "платформа + досліджуване тіло" можна визначити за формулою

$$I = \frac{(m+m_o)gRr}{4\pi l^2} T^2 . \qquad (6)$$

Очевидно, різниця моментів інерції, які обчислюють за формулами (6) та (5), і буде моментом інерції досліджуваного тіла.

Виконуючи завдання, треба користуватися низкою інших робочих формул, виведення яких наводимо з міркувань зручності нижче.

Порядок виконання роботи

1. Визначте момент інерції ненавантаженої платформи I_o. Для цього потягніть та відпустіть шнур. Вимірйте секундоміром час t_o n повних коливань ($n = 20$) і визначте $T_o = t_o/n$.
2. Знаючи l, R, r, m_o (сталі параметри платформи) та T_o, обчисліть за формулою (5) момент інерції I_o.
3. Покладіть на платформу досліджуване тіло масою m так, щоб вісь крутильних коливань трифілярного підвісу проходила через його центр мас. Виконайте вимірювання, аналогічні до описаних у

пункті 1, визначте період T_1 та обчисліть за формулою (6) момент інерції системи "платформа + тіло"

$$I_1' = \frac{(m_o+m)gRr}{4\pi^2 l} T_1^2 .$$

Оскільки момент інерції системи – величина адитивна, то $I_1' = I_1 + I_o$ і момент інерції досліджуваного тіла відносно осі, яка проходить через його центр мас,

$$I_1 = I_1' - I_o = \frac{gRr}{4\pi^2 l}\left[(m_o+m)T_1^2 - m_o T_o^2\right] .$$

4. Покладіть на платформу два таких тіла симетрично до осі крутильних коливань на відстані a від неї. Виконайте вимірювання, аналогічні до описаних у пункті 1, визначте період T_2 та обчисліть новий момент інерції системи

$$I_2' = \frac{(m_o+2m)gRr}{4\pi^2 l} T_2^2 .$$

Позначивши момент інерції одного з тягарців відносно осі крутильних коливань платформи через I_2, отримаємо

$$I_2 = \frac{I_2' - I_o}{2} = \frac{gRr}{8\pi^2 l}\left[(m_o+2m)T_2^2 - m_o T_o^2\right] .$$

5. Порівняйте експериментально отримане значення моменту інерції I_2 з його значенням I_3, обчисленим за теоремою Гюйгенса-Штейнера:

$$I_3 = I_1 + ma^2 = \frac{gRr}{4\pi^2 l}\left[(m_o+m)T_1^2 - m_o T_o^2\right] + ma^2 .$$

6. Вимірювання часу 20 повних коливань t_o, t_1, t_2 виконайте п"ять разів. Результати запишіть у таблицю. Оцініть точність експерименту. Зробіть відповідні висновки.

Контрольні запитання

1. Що називають моментом інерції твердого тіла?
2. Які коливання називають гармонічними?
3. Запишіть вираз для зміщення під час гармонічних коливань.
4. Запишіть формулу для кінетичної енергії обертального руху.
5. Сформулюйте закон збереження механічної енергії.
6. Запишіть закон збереження механічної енергії для трифілярного

підвісу, який виконує крутильні коливання.

7. Сформулюйте та доведіть теорему Гюйгенса–Штейнера.
8. Виведіть формулу для періоду коливань трифілярного підвісу.
9. Що називають кутовою швидкістю; кутовим прискоренням?

Форма звіту до лабораторної роботи 121

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робочі формули з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta I_o = \bar{I}_o \left[\left(\frac{\Delta m_o}{\bar{m}_o}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{\bar{R}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{\bar{r}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_o}{\bar{T}_o}\right)^2 \right]^{1/2};$$

$$\Delta I_1' = \bar{I}_1' \left[\left(\frac{\Delta m_o}{\bar{m}_o+\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{\bar{m}_o+\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{\bar{R}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{\bar{r}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_1}{\bar{T}_1}\right)^2 \right]^{1/2};$$

$$\Delta I_2' = \bar{I}_2' \left[\left(\frac{\Delta m_o}{\bar{m}_o+2\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta m}{\bar{m}_o+2\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{\bar{R}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{\bar{r}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_2}{\bar{T}_2}\right)^2 \right]^{1/2};$$

$$\Delta I_1 = \left[(\Delta I_1')^2 + (\Delta I_o)^2 \right]^{1/2}; \qquad \Delta I_2 = \left[(\Delta I_2')^2 + (\Delta I_o)^2 \right]^{1/2};$$

$$\Delta I_3 = \left[(\Delta I_1)^2 + (\bar{a}^2 \Delta m_1)^2 + (2\bar{m}_1 \bar{a} \Delta a)^2 \right]^{1/2}.$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$m_o = \bar{m}_o \pm \Delta m_o$; $m = \bar{m} \pm \Delta m$; $l = \bar{l} \pm \Delta l$; $R = \bar{R} \pm \Delta R$; $r = \bar{r} \pm \Delta r$; $a = \bar{a} \pm \Delta a$

№ п/п	n	$t_{o i}$	T_o	$t_{1 i}$	T_1	$t_{2 i}$	T_2	I_o	ΔI_o	I_1	ΔI_1	I_2	ΔI_2	I_3	ΔI_3
1–5															
с /зп	20														

6. Кінцеві результати:

$I_2 = \bar{I}_2 \pm \Delta I_2$; $\delta I_2 =$; $p =$; $n = 5$;

$I_3 = \bar{I}_3 \pm \Delta I_3$; $\delta I_3 =$; $p =$; $n = 5$.

7. Висновки.

Лабораторна робота 122. **ВИВЧЕННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ**

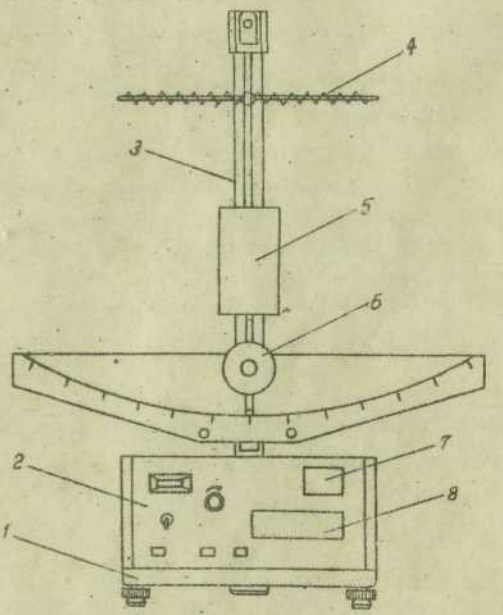
Завдання: дослідити вільні; згасаючі та вимушені коливання; визначити циклічну частоту вільних коливань; логарифмічний декремент згасання згасаючих коливань і дослідити явище резонансу.

Приладдя: лабораторна установка.

Теоретичний матеріал: пружна (квазіпружна) сила; гармонічні коливання, їхнє рівняння та розв'язок; амплітуда, частота, фаза; згасаючі коливання, їхнє рівняння та розв'язок; коефіцієнт згасання, логарифмічний декремент згасання; вимушені коливання, їхнє рівняння та розв"язок; явище резонансу.

Література: 1, §§ 50–53; 2, §§ 39, 40; 4, §§ 5.1–5.9; 5, §§ 123, 124, 126, 128, 131, 136.

Опис установки. Установка (див. рисунок) змонтована на основі *1*, що має чотири ніжки, висоту яких можна змінювати (вирівнювати установку). На основі закріплені колонка *3* та електронний блок *2*, який складається з мілісекундоміра *8*, лічильника періодів *7*, електропривода шатуна, кнопок керування. На колонці закріплені два кронштейни. До верхнього кронштейна прикріплені підвіски, у які на підшипниках вмонтовано маятник *6* і шатун. На стержні маятника закріплені переривач світлового потоку та прапорець *5*, за допомогою якого змінюють силу



світлового потоку та прапорець 5, за допомогою якого змінюють силу опору. Вимушені коливання збуджують за допомогою диска, закріпленого на валу електродвигуна, який коливає шатун, з"єднаний пружиною 4 зі стержнем маятника. До шатуна прикріплений переривач світлового потоку, за допомогою якого визначають частоту шатуна (частоту змушувальної сили).

До нижнього кронштейна прикріплена кутова шкала, за допомогою якої визначають амплітуду коливань маятника. У кронштейн вмонтований фотоелектричний датчик, який під час проходження через нього переривача світлового потоку вмикає мілісекундомір та лічильник.

Виведення робочих формул. Частота вільних коливань маятника $\nu = 1/T = n/t$, де T – період коливань; n – кількість коливань; t – час, протягом якого виконуються n коливань. Циклічна частота

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi n}{t}. \qquad (1)$$

Для згасаючих коливань їхня амплітуда змінюється за експоненціальним законом

$$A = A_0 e^{-\delta t}. \qquad (2)$$

Відношення двох послідовних амплітуд $\theta = A_n/A_{n+1}$ є сталим, не залежить від їхніх значень і називається декрементом згасання, логарифм цього відношення $\ln\theta = \Delta$ – називається логарифмічним декрементом згасання

$$\ln\theta = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln\frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \ln e^{\delta T} = \delta T = \Delta. \qquad (3)$$

Нехай у момент часу t_1 амплітуда згасаючих коливань

$$A_1 = A_0 e^{-\delta t_1}, \qquad (4)$$

а в момент часу t_2

$$A_2 = A_0 e^{-\delta t_2}. \qquad (5)$$

Розділивши почленно ці вирази, одержимо

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{-\delta(t_1 - t_2)} = e^{\delta\Delta t} = e^{\delta n_1 T}, \qquad (6)$$

Після логарифмування

$$\ln\frac{A_1}{A_2} = \delta n_1 T$$

і звідси

$$\delta = \frac{1}{n_1 T}\ln\frac{A_1}{A_2}, \qquad (7)$$

де δ – коефіцієнт згасання, що є фізичною величиною, оберненою до проміжку часу τ, протягом якого амплітуда коливань зменшується в e разів.

Логарифмічний декремент згасання

$$\Delta = \delta T = \frac{1}{n_1}\ln\frac{A_1}{A_2} \qquad (8)$$

– це фізична величина, обернена до кількості коливань n, протягом яких амплітуда коливань зменшується в e разів.

Порядок виконання роботи

1. Увімкніть установку в електромережу. Закріпіть переривач світлового потоку, зв"язаний з маятником, так, щоб він під час коливання останнього переривав світловий потік фотоелектричного датчика. Відхиліть маятник на 5-10° і відпустіть його. Натисніть кнопку "Сброс", а коли на лічильнику періодів засвітиться цифра "9", натисніть кнопку "Стоп". Через один період закінчиться цикл вимірювання і на індикаторах засвітяться цифри кількості періодів (10) та час, протягом якого маятник виконав ці коливання. Запишіть дані вимірювань у таблицю. Дослід повторіть п"ять разів. За результатами вимірювань обчисліть період коливань та їхню циклічну частоту.
2. Надайте маятнику коливного руху так, щоб його амплітуда була дещо більшою від початкової A_1, заданої викладачем. У момент, коли амплітуда дорівнюватиме вказаній величині, натисніть кнопку "Пуск", а коли амплітуда досягне кінцевого значення A_2 – кнопку "Стоп". Запишіть дані вимірювань A_1, A_2, n_1 у таблицю. Дослід повторіть п"ять разів. За формулою (8) обчисліть логарифмічний декремент згасання. Аналогічні вимірювання виконайте для інших орієнтацій гальмівного

прапорця і визначте для них логарифмічний декремент.

3. Обчисліть похибки циклічної частоти $\Delta\omega$ і $\delta\omega$ та логарифмічного декремента згасання $\Delta\Delta$ і $\delta\Delta$. Зробіть відповідні висновки.

Вивчення вимушених коливань.

4. Піднесіть угору переривач світлового потоку на стержні маятника, а переривач світлового потоку на стержні шатуна опустіть у щілину фотоелектричного датчика. Увімкніть електродвигун, визначте частоту коливань шатуна і максимальну амплітуду коливань маятника для цієї частоти. Вимірювання виконайте для різних частот коливань шатуна (змушувальної сили) до і після досягнення резонансу (не менше семи-дев"яти). Результати вимірювань запишіть у таблицю і зобразіть графічно, відклавши по осі абсцис циклічну частоту шатуна, а по осі ординат - амплітуди коливань маятника. Визначте з графіка резонансну частоту $\omega_{рез}$.

Контрольні запитання

1. Який тип руху називається гармонічним коливанням?
2. Які сили можуть спричинити появу гармонічних коливань?
3. Запишіть диференціальне рівняння коливного руху, якщо наявні сила опору та періодична за значенням змушувальна сила.
4. Що називається фазою гармонічного коливання?
5. Що називається логарифмічним декрементом згасання? Як він пов"язаний з коефіцієнтом згасання?
6. Накресліть графік залежності зміщення від часу для згасаючих коливань.
7. Який фізичний зміст і розмірність коефіцієнта згасання?

Форма звіту до лабораторної роботи 122

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робочі формули з розшифруванням величин.

$$\omega = \frac{2\pi n}{t} ; \quad \Delta = \frac{1}{n_1} \ln \frac{A_1}{A_2} .$$

4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta\omega = \bar{\omega}\frac{\Delta t}{\bar{t}} ; \quad \delta\omega = \frac{\Delta\omega}{\bar{\omega}} ;$$

$$\Delta\Delta = \bar{\Delta}\frac{1}{n_1}\left[(\Delta A_1/\bar{A}_1)^2 + (\Delta A_2/\bar{A}_2)^2\right]^{1/2} ; \quad \delta\Delta = \Delta\Delta/\bar{\Delta} .$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

№ п/п	t_i, с	ω, $с^{-1}$	$\Delta\omega$, $с^{-1}$	$\delta\omega$%	A_1^0	A_2^0	n_1	Δ	$\Delta\Delta$	$\delta\Delta$%
1-5										
с/зн										

$A_1 = \bar{A}_1 \pm \Delta A_1$; $A_2 = \bar{A}_2 \pm \Delta A_2$; $t = \bar{t} \pm \Delta t$; $n_1 = \bar{n}_1 \pm \Delta n_1$;

$\omega = \bar{\omega} \pm \Delta\omega$; $\delta\omega =$; $p =$; $n = 5$;

$\Delta = \bar{\Delta} \pm \Delta\Delta$; $\delta\Delta =$; $p =$; $n = 5$.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t_i с											
ω											
A											

6. Графік залежності $A = f(\omega)$.

7. Висновки.

Лабораторна робота 123. **ВИВЧЕННЯ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ РУХУ ГІРОСКОПА**

Завдання: визначити кутову швидкість обертання гіроскопа.

Приладдя: гіроскоп у підвісі Кардана; джерело живлення гіроскопа; секундомір; тягарець з ниткою; вага з набором важків; штангенциркуль; лінійка.

Теоретичний матеріал: рівняння рівноприскореного руху тіла; момент сили; момент інерції; рівняння моментів; закон збереження моменту імпульсу; гіроскоп; вільна регулярна прецесія гіроскопа; вимушена прецесія гіроскопа.

Література: 1, §§ 8, 21, 24, 31, 32, 35; 2, §§ 30, 32, 33, 37, 49-52; 3, §§ 5.1, 6.2, 6.5-6.7, 7.5, 9.11-9.15; 5, §§ 66-70; 6, §§ 29, 38, 39; 7, § 5.4.

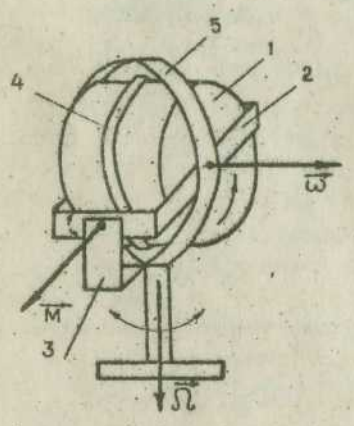


Рис. 1.

Опис установки. Установка складається з гіроскопа на підвісі Кардана; блока його живлення; електросекундоміра; пристрою, який дає змогу автоматично вимірювати час опускання тягарця із заданої висоти під час вимірювання моменту інерції гіроскопа. Гіроскоп (рис. 1) має вигляд циліндра *1*, який обертається навколо нерухомого статора. Вісь статора нерухомо закріплена в рамці *2*, яка за допомогою двох півосей кріпиться до вилки *3* і може вільно обертатись у вертикальній площині. Вилка відповідно насаджена на вертикальну вісь підставки. Всі три осі перетинаються в одній точці - центрі мас гіроскопа.

На твірній циліндра гіроскопа напресований шків *4*, на який намотується нитка з прикріпленим до неї тягарцем під час визначення

моменту інерції гіроскопа динамічним методом. Рамку охоплює кільце *5* з органічного скла, площина якого перпендикулярна до площини рамки і збігається з віссю статора гіроскопа. Радіус цього кільця є плечем сили, яка створює зовнішній момент, що спричинює прецесійний рух гіроскопа.

Виведення робочої формули. Гіроскопом називається тіло з великим моментом інерції відносно однієї з вільних осей, яка є віссю симетрії (віссю фігури). Якщо точка опори гіроскопа збігається з центром його мас, гіроскоп називається вільним. Таким чином гіроскоп закріплюють за допомогою попередньо згаданого підвісу Кардана. Якщо всі головні моменти інерції гіроскопа однакові ($I_{11}=I_{22}=I_{33}$), то гіроскоп називається сферичним. Якщо однакові лише два головні моменти, наприклад, $I_{11}=I_{22}\neq I_{33}$, то гіроскоп симетричний. Звичайно, говорячи про гіроскоп, мають на увазі саме останній. Гіроскопові надають рух навколо осі, яка є віссю його симетрії і відносно якої момент інерції гіроскопа є найбільшим.

Теорія руху гіроскопа побудована на рівнянні моментів

$$d\vec{L}/dt = \vec{M}\,, \qquad (1)$$

де $\vec{L}$ - момент імпульсу гіроскопа; $\vec{M}$ - моменти сил, що діють на гіроскоп.

Розглядають два випадки - перший, якщо на гіроскоп не діють моменти сил ($\vec{M} = 0$), і другий, якщо діють ($\vec{M} \neq 0$). Якщо $\vec{M} = 0$, то гіроскоп називають вільним. Для вільного гіроскопа розглядають знову два випадки - перший, коли гіроскоп обертається точно навколо своєї осі симетрії (осі фігури), і другий, коли він обертається навколо будь-якої іншої осі. У першому випадку напрям осі збігається з напрямом моменту кількості руху $\vec{L}$, який відповідно зберігає сталим свій напрям у просторі ($\vec{M} = 0$, отже, $\vec{L}$ = const за значенням і напрямом). У другому випадку також $\vec{L}$ = const, але напрям осі фігури відрізняється від напряму $\vec{L}$. Можна довести, що тепер вісь фігури буде рівномірно обертатися навколо напряму $\vec{L}$ з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$, описуючи поверхню конуса. Такий же рух виконує миттєва вісь гіроскопа, напрям якої збігається з напрямом кутової швидкості $\vec{\omega}$ гіроскопа. Її можна розкласти на складові (рис. 2), одна з яких спря-

мована вздовж осі фігури $\vec{\omega}_{гір}$, а друга дорівнює кутовій швидкості Ω, з якою обертається сама вісь фігури навколо напряму моменту імпульсу.

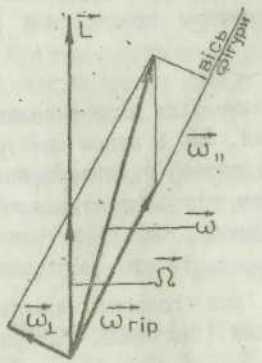


Рис. 2.

Рух цього типу називають вільною регулярною прецесією гіроскопа. Кутова швидкість цього руху називається кутовою швидкістю прецесії. Миттєву швидкість гіроскопа $\vec{\omega}$ можна розглядати як суму двох кутових швидкостей: $\vec{\omega}_{\parallel}$, яка дорівнює проекції $\vec{\omega}$ на вісь фігури (швидкість, з якою гіроскоп обертається навколо власної осі - осі фігури), і перпендикулярної до неї швидкості $\vec{\omega}_{\perp}$ - швидкості обертання гіроскопа навколо осі, перпендикулярної до осі фігури (рис. 2). Обидві осі - перпендикулярна до осі фігури гіроскопа і сама вісь фігури - є головними осями інерції, тому й момент імпульсу гіроскопа можна розглядати як суму двох векторів

$$\vec{L} = I_{\parallel}\vec{\omega}_{\parallel} + I_{\perp}\vec{\omega}_{\perp} , \qquad (2)$$

де $I_{\parallel}$ - момент інерції гіроскопа відносно осі фігури; $I_{\perp}$ - момент інерції відносно осі, перпендикулярної до осі фігури.

Якщо момент зовнішніх сил $\vec{M} = 0$, то

$$\vec{L} = I_{\parallel}\vec{\omega}_{\parallel} + I_{\perp}\vec{\omega}_{\perp} = \text{const}. \qquad (3)$$

У другому випадку, якщо $\vec{M} \neq 0$, у наближеній теорії також приймають, що вектор моменту імпульсу $\vec{L}$ напрямлений уздовж осі фігури, тобто у формулі (2) нехтують другим членом. У цьому наближенні вектори $\vec{L}$ і $\vec{\omega}$ не відрізняються напрямом і спрямовані вздовж осі фігури гіроскопа:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} , \text{ де } I = I_{\parallel}.$$

виявляється, що під дією зовнішнього моменту сил вісь гіроскопа виконує новий тип руху, який називають вимушеною прецесією. Визначимо кутову швидкість вимушеної прецесії. Припустимо, що під дією зовнішнього моменту сил $\vec{M}$ вісь гіроскопа повернулася на деякий кут $d\varphi$ і момент імпульсу змінився на $d\vec{L}$ (зміна настала внаслідок зміни напряму без зміни величини кутової швидкості обертання гіроскопа, тобто без зміни $|\vec{L}|$). Згідно з рівнянням моментів (1)

$$d\vec{L} = \vec{M}\,dt , \qquad (4)$$

тобто напрям $d\vec{L}$ збігається з напрямом моменту сили $\vec{M}$. Отже, поворот навколо осі O, перпендикулярної до площини рисунка (рис. 3), відбувається під дією моменту сили $\vec{M}$, напрям якого паралельний до напряму вектора $d\vec{L}$. Отже, під час дії на гіроскоп моменту сили вектор кутової швидкості його обертання $\vec{\omega}$ повертається до збігання з напрямом вектора $\vec{M}$, виконуючи прецесійний рух. Кутову швидкість прецесії $\Omega = d\varphi/dt$ можна визначити, використавши рис. 3. Як бачимо,

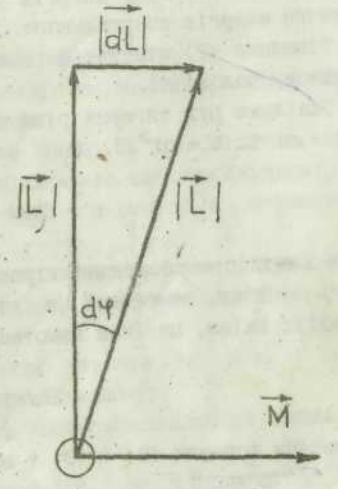


Рис. 3.

$$dL = Ld\varphi; \quad dL/dt = L\,d\varphi/dt = I\Omega . \qquad (5)$$

Звідси

$$\Omega = M/L = M/I\omega . \qquad (6)$$

Останнє співвідношення дає змогу обчислити кутову швидкість обертання гіроскопа на основі експериментальних визначень моменту сили, моменту інерції та кутової швидкості прецесії гіроскопа.

Виведемо формулу для визначення моменту інерції гіроскопа. Намотаємо на гіроскоп нитку, до якої прикріплений тягарець масою m. При цьому тягарець підніметься на висоту h і його потенціальна

енергія буде дорівнювати mgh. Відпустимо тягарець. Під дією сили ваги тягарець почне виконувати рівноприскорений поступальний рух, надаючи гіроскопу обертального руху. Потенціальна енергія тягарця буде зменшуватися, переходячи в кінетичну енергію його поступального руху та кінетичну енергію обертального руху гіроскопа. Якщо знехтувати силами тертя та опору, то система тягарець-гіроскоп буде замкнута і до неї можна застосувати закон збереження механічної енергії

$$mgh = mv^2/2 + I\omega_1^2/2 , \qquad (7)$$

де $mv^2/2$ - кінетична енергія поступального руху тягарця; $I\omega_1^2/2$ - кінетична енергія обертального руху гіроскопа.

Рівняння (7) стосується моменту часу, коли тягарець перебуває в найнижчому положенні.

Оскільки рух тягарця рівноприскорений без початкової швидкості, то $v = at$ і $h = at^2/2$, де t - час опускання тягарця. Тоді

$$v = 2h/t . \qquad (8)$$

Кутова швидкість обертання гіроскопа пов"язана з лінійною швидкістю тягарця (нитки, намотаної на гіроскоп) співвідношенням $v = \omega_1 r$, де r - радіус шківа, на який намотана нитка. Тоді

$$\omega_1 = 2h/rt . \qquad (9)$$

Підставивши формули (8) і (9) у вираз (7), отримаємо

$$I = \frac{mr^2(gt^2-2h)}{2h} . \qquad (10)$$

Прецесійний рух гіроскопа спричинений зовнішнім моментом сили

$$M = PR = m_1 gR , \qquad (11)$$

де $P = m_1 g$ - вага тягарця, яка створює момент сили, що діє на гіроскоп; R - плече сили.

Кутову швидкість прецесії гіроскопа Ω легко визначити, якщо виміряти її період T', тоді

$$\Omega = 2\pi/T' . \qquad (12)$$

Підставимо вирази (10)-(12) у формулу (6), тоді отримаємо робочу формулу для кутової швидкості обертання гіроскопа

$$\omega = \frac{m_1 gRhT'}{\pi mr^2(gt^2-2h)} . \qquad (13)$$

Порядок виконання роботи

1. Визначте зважуванням маси тягарців m та m_1.
2. Виміряйте штангенциркулем радіус шківа на гіроскопі r та радіус шківа з органічного скла R.
3. Встановіть задану викладачем висоту h (h - відстань від електромагніта до пристрою, який вимикає електросекундомір).
4. Виміряйте час опускання тягарця t з висоти h, дотримуючись такої послідовності:
   закріпіть нитку на шківі гіроскопа і намотуйте її на шків, доки тягарець масою m не торкнеться електромагніта, увімкніть електромагніт;
   вимкніть електромагніт, який утримує тягарець у верхньому положенні й увімкніть електросекундомір;
   після автоматичної зупинки електросекундоміра запишіть його покази.
5. Увімкніть гіроскоп. Переконайтесь, що гіроскоп не здійснює прецесійного руху. Прикладіть до гіроскопа момент сили $M = PR$. Виміряйте період прецесії гіроскопа ($T' = t'/n$).
6. Усі вимірювання повторіть п"ять разів.
7. Обчисліть за формулою (13) кутову швидкість обертання гіроскопа. Оцініть точність експерименту. Зробіть відповідні висновки.

Контрольні запитання

1. Що називається гіроскопом?
2. Сформулюйте і запишіть основний закон динаміки обертального руху.

3. Як спричинити вимушену прецесію гіроскопа?
4. Як змінюється швидкість прецесії гіроскопа зі зміною кутової швидкості його обертання?
5. Значення яких величин треба виміряти в цій роботі, щоб визначити момент інерції гіроскопа?
6. Який взаємозв"язок між напрямами векторів моменту сили, моменту імпульсу та кутової швидкості прецесії гіроскопа?
7. Яке спрощення застосовують у наближеній теорії гіроскопа?
8. Як змінюється кутова швидкість прецесії зі зміною моменту сили, прикладеного до гіроскопа?

Форма звіту до лабораторної роботи 123

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робоча формула з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta\omega = \bar{\omega}\left\{\left[\frac{\Delta m_1}{\bar{m}_1}\right]^2+\left[\frac{\Delta R}{\bar{R}}\right]^2+\left[\frac{\Delta T'}{\bar{T}'}\right]^2+\left[\frac{\Delta m}{\bar{m}}\right]^2+\left[\frac{2\Delta r}{\bar{r}}\right]^2+\left[\frac{gt^2\Delta h}{\bar{h}(g\bar{t}^2-2\bar{h})}\right]^2+\left[\frac{2gt\Delta t}{\bar{h}(g\bar{t}^2-2\bar{h})}\right]^2\right\}^{1/2}.$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$$r_i = \bar{r} \pm \Delta r; \quad R = \bar{R} \pm \Delta R; \quad h = \bar{h} \pm \Delta h; \quad m = \bar{m} \pm \Delta m; \quad m_1 = \bar{m}_1 \pm \Delta m_1,$$

№ п/п	t_i	n	t_i'	T'	ω	$\Delta\omega$	$\delta\omega$%
1-5					▒▒▒	▒▒▒	▒▒▒
с/зн							

6. Кінцевий результат:

$$\bar{\omega} = \omega \pm \Delta\omega; \qquad \delta\omega = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5.$$

7. Висновки.

Лабораторна робота **123А. ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЕЦЕСІЇ ГІРОСКОПА ТА ВИЗНАЧЕННЯ ЙОГО МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ**

Завдання: визначити момент інерції гіроскопа.

Приладдя: дослідна установка.

Теоретичний матеріал: момент сили; момент інерції твердого тіла; рівняння моментів; закон збереження моменту імпульсу; рух вільного гіроскопа; вимушена прецесія гіроскопа; тензор інерції.

Література: 1, §§ 21, 24, 31, 32, 35; 2, §§ 30, 32, 33, 37, 49-52; 3, §§ 5.1, 6.2, 6.5-6.7, 7.5, 9.11-9.15; 5, §§ 66-70; 6, §§ 29, 38, 39; 7, § 5.4.

Опис установки. На основі з чотирма ніжками, висоту яких можна змінювати (вирівнювати установку), закріплені блок керування та колонка (рис. 1). До колонки прикріплений кронштейн, на якому у вилці 2 змонтовано гіроскоп з електроприводом 1 та фотоелектричний датчик для вимірювання кута повороту гіроскопа в горизонтальній площині. Гіроскоп з електроприводом та вилкою може обертатися навколо вертикальної осі, а гіроскоп з електроприводом - навколо горизонтальної, яка проходить через вилку. На валі електроприводу закріплений масивний металевий диск, захищений прозорим екраном 6. Диск має прорізи, через які світло потрапляє на фотоелектричний датчик, імпульси якого дають інформацію про швидкість обертання гіроскопа. До корпуса електропривода прикріплений важіль 4 з міліметровою шкалою. Уздовж важеля може переміщуватися і закріплюватися тягарець 3, яким можна зрівноважувати гіроскоп або прикладати до нього різні моменти зовнішніх сил.

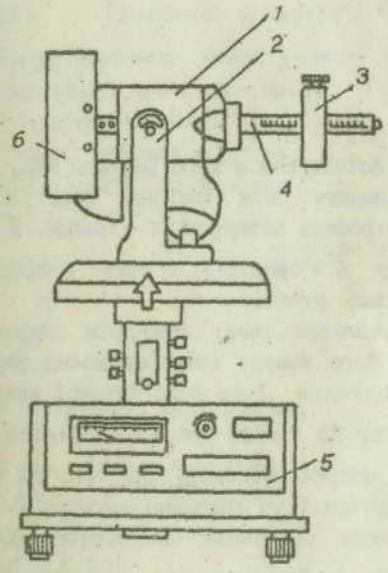


Рис. 1.

На основі установки розміщений також блок живлення

електропривода гіроскопа та вимірювання параметрів його руху. На передній панелі блока 5 є кнопки "Сеть", "Сброс", "Стоп", ручка потенціометра, за допомогою якої вмикають напругу живлення електропривода гіроскопа та змінюють швидкість його обертання, покажчик швидкості обертання гіроскопа, цифровий індикатор кута повороту гіроскопа та мілісекундомір.

Виведення робочої формули. Гіроскопом називається тверде тіло з великим моментом інерції відносно осі симетрії. Теорія руху гіроскопа грунтується на рівнянні моментів

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \qquad (1)$$

де $\vec{L}$ – момент імпульсу; $\vec{M}$ – момент сили. Це рівняння аналогічне до другого закону Ньютона для поступального руху:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \qquad (2)$$

де $\vec{P}$ – імпульс тіла; $\vec{F}$ – сила.

Якщо точка опори гіроскопа збігається з його центром мас, то на гіроскоп не діють зовнішні моменти сили тяжіння: якщо ж нема яких-небудь зовнішніх сил, то гіроскоп називається вільним. У цьому випадку $\vec{M} = 0$, і момент імпульсу $\vec{L} = \text{const}$ ($\vec{L} = \text{const}$ і тоді, якщо сума зовнішніх моментів сил дорівнює нулю).

З теорії руху гіроскопа випливає таке: якщо він обертається точно навколо осі симетрії, то його момент імпульсу можна виразити через добуток моменту інерції гіроскопа I та його кутової швидкості обертання $\vec{\omega}$: $\vec{L} = I\vec{\omega}$ аналогічно до $\vec{P} = m\vec{v}$ для поступального руху. Отже, якщо $\vec{L} = \text{const}$, то сталі напрям осі обертання (бо, як відомо, вектор $\vec{\omega}$ збігається з віссю обертання) та значення вектора $\vec{\omega}$, тобто кутова швидкість обертання. Якщо обертання виконується навколо будь-якої іншої осі, то $\vec{L} = \text{const}$, як і в попередньому випадку, однак напрям осей обертання і симетрії відрізняється від напряму $\vec{L}$ ($\vec{L} \neq I\vec{\omega}$). Можна довести, що тоді вісь симетрії (її називають віссю фігури) рівномірно обертається навколо напряму вектора $\vec{L}$, описуючи поверхню конуса. Рух цього типу називають вільною прецесією гіроскопа.

Якщо $\vec{M} \neq 0$, тобто якщо на гіроскоп діють зовнішні моменти сил, сума яких не дорівнює нулю, але гіроскоп обертається точно навколо осі симетрії, то він виконує новий тип руху, який називають вимушеною прецесією.

Виведемо формулу, яка виражає закон вимушеної прецесії. Нехай на вісь гіроскопа, який обертається зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо осі симетрії, почала діяти деяка зовнішня сила $\vec{F}$, момент якої відносно осі обертання дорівнює $\vec{M}$. Припустимо, що під дією цього зовнішнього моменту вісь гіроскопа повернулася на нескінченно малий кут $d\varphi$ і внаслідок цього момент імпульсу змінився на $d\vec{L}$ (зміна настала внаслідок зміни напряму вектора $\vec{L}$ без зміни його модуля $|\vec{L}|$ (рис. 2)).

Згідно з рівнянням моментів $d\vec{L} = \vec{M}dt$, тобто напрям $d\vec{L}$ збігається з напрямом моменту сили $\vec{M}$. Отже, поворот навколо осі O, перпендикулярної до площини рисунка, відбувається під дією моменту сили, напрям вектора якого паралельний до напряму вектора $d\vec{L}$. Отже, під час дії на гіроскоп моменту сили $\vec{M}$ вектор кутової швидкості обертання гіроскопа $\vec{\omega}$ повертається в напрямі до збігання з напрямом вектора $\vec{M}$, виконуючи таким чином прецесійний рух. Кутову швидкість прецесії $\Omega = d\varphi/dt$ можна визначити з формули, яка зв"язує dL, L і $d\varphi$:

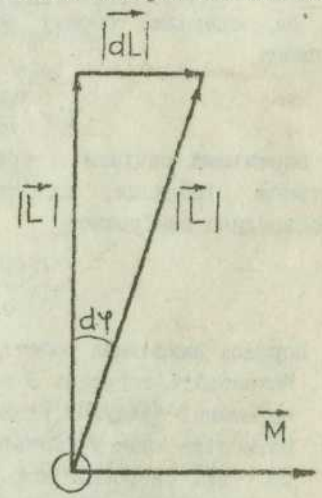


Рис. 2.

$$dL = Ld\varphi.$$

Продиференціюємо цей вираз по часу: $dL/dt = Ld\varphi/dt = L\Omega$, звідки з урахуванням (1) одержимо:

$$\Omega = M/I\omega. \qquad (3)$$

Напрями векторів $\vec{M}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\Omega}$ пов"язані співвідношенням

$$\vec{M} = [\vec{\Omega}\, I\vec{\omega}]. \qquad (4)$$

Останнє співвідношення можна отримати з формули Пуансо, яка

стверджує: якщо якийсь вектор $\vec{A}$ (у нашому випадку його роль відіграє вектор $\vec{L}$) обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, не змінюючи свого значення, то $d\vec{A}/dt = [\vec{\omega}\,\vec{A}]$.

Якщо $\vec{\Omega}$ перпендикулярний до $\vec{L}$, то $|\vec{M}| = |\vec{\Omega}| * |\vec{L}|$, або

$$M = I\Omega. \qquad (5)$$

Ця формула виражає закон вимушеної прецесії гіроскопа.

У нашому випадку

$$M = mgd, \qquad (6)$$

де m – маса тягарця 3 (див. рис.1); g – прискорення вільного падіння; d – плече сили mg, яка діє на вісь гіроскопа.

Кутову швидкість прецесії Ω можна одержати, вимірявши час t, протягом якого гіроскоп повернувся на кут α радіанів унаслідок прецесійного руху. Тоді

$$\Omega = \alpha/t. \qquad (7)$$

Підставивши формули (6) і (7) у вираз (5), та врахувавши, що $L = I\omega$, одержимо робочу формулу для визначення моменту інерції гіроскопа

$$I = \frac{mgdt}{\alpha\omega}. \qquad (8)$$

Перевівши радіани в градуси, а кутову швидкість – у частоту обертання гіроскопа, одержимо робочу формулу в величинах, які безпосередньо вимірюємо:

$$I = \frac{90^{\circ} mgdt}{\alpha^{\circ}\pi^2\nu}. \qquad (9)$$

Порядок виконання роботи

1. Встановіть тягарець 3 на важелі 4 так, щоб гіроскоп був у положенні байдужої рівноваги.
2. Натисніть кнопку "Сеть" 1, плавно повертаючи ручку потенціометра "Рег. скорости" за годинниковою стрілкою, встановіть оберти гіроскопа в інтервалі 6000-8000 обертів за хвилину. Доможіться стабільної швидкості обертання гіроскопа. Переконайтеся, що гіроскоп не виконує прецесійного руху.
3. Перемістіть тягарець на важелі на відстань d (d ≥ 6 см) від положення рівноваги в бік кінця важеля.
4. Натисніть кнопку "Сброс" і після повороту гіроскопа на кут, заданий викладачем, натисніть кнопку "Стоп".
5. Запишіть у таблицю значення кута повороту та час прецесії. Дослід повторіть п"ять разів.

6. Перемістіть тягарець на важелі в інший бік від положення р вноваги. Переконайтесь, що напрям кутової швидкості прецесії змінився на протилежний.
7. Обчисліть значення моменту інерції гіроскопа, оцініть точність експерименту. Зробіть відповідні висновки.

Контрольні запитання

1. Що називається гіроскопом?
2. Що називається моментом інерції матеріальної точки; моментом інерції твердого тіла?
3. Що називається моментом імпульсу?
4. Сформулюйте другий закон динаміки для обертального руху.
5. Як спричинити прецесію гіроскопа?
6. Який напрям мають вектори кутової швидкості; моменту сили; моменту імпульсу?
7. Значення яких величин треба виміряти в цій роботі, щоб визначити момент інерції гіроскопа?
8. Як пов"язані між собою напрями векторів $\vec{M}$, $\vec{L}$, і $\vec{\Omega}$?
9. Наведіть приклади застосування гіроскопів.

Форма звіту до лабораторної роботи I23A

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робоча формула з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta I = \bar{I}\left[\left(\frac{\Delta m}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\bar{t}}\right)^2\right]^{1/2}; \qquad \delta I = \Delta I/\bar{I}.$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$m = (0{,}375 \pm 0{,}001)$кг; $g = (9{,}81 \pm 0{,}01)$м/с$^{-2}$;

№ п/п	α°	$\Delta\alpha$	t_1	Δt	ν	$\Delta\nu$	I	ΔI	δI
1-5									
с/зн									

$\alpha = \bar{\alpha} \pm \Delta\alpha$; $\nu = \bar{\nu} \pm \Delta\nu$; $t = \bar{t} \pm \Delta t$; $d = \bar{d} \pm \Delta d$.

6. Кінцевий результат: $I = \bar{I} \pm \Delta I$; $\delta I =$; $p =$; $n = 5$;
7. Висновки.

Лабораторна робота 124. **ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ПОЛЬОТУ КУЛІ БАЛІСТИЧНИМ МЕТОДОМ**

Завдання: визначити швидкість польоту кулі за допомогою балістичного маятника.

Приладдя: балістичний маятник; пружинний пістолет; набір куль.

Теоретичний матеріал: кутова швидкість та кутове прискорення; момент сили та момент імпульсу; момент інерції тіла відносно осі обертання; другий закон Ньютона для поступального та обертального рухів; закон збереження імпульсу та моменту імпульсу; закон збереження механічної енергії.

Література: 1, §§ 9, 19, 21-25, 32; 2, §§ 3, 4, 11, 30, 32, 33; 3, §§ 1.3, 1.4, 1.6, 1.8, 5.2, 6.1, 6.2, 6.4-6.7, 7.1-7.5, 7.12, 9.1-9.6; 5, §§ 24, 25, 37; 6, §§ 5, 9, 25, 27, 29; 7, §§ 3.1, 3.3, 4.5.

Опис установки. Балістичний маятник – це циліндр, підвішений на довгих легких нитках. У маятник стріляють з пружинного пістолета металевою кулькою. Днище маятника, в яке влучає кулька, заповнене пластиліном. Унаслідок непружного удару кульки в маятник він відхиляється від положення рівноваги. Відхилення визначають за допомогою відлікової шкали та стрілки, прикріпленої до маятника.

Виведення робочої формули. Рух тіл під час їхнього зіткнення можна дослідити за допомогою законів Ньютона. Однак для цього треба знати, які сили виникають під час зіткнення тіл і як вони змінюються внаслідок співудару. Якщо нас цікавлять не деталі зіткнення, а лише його кінцевий результат, то в такому випадку дослідження за допомогою законів Ньютона не потрібне. Тобто, якщо час співудару кулі з маятником малий порівняно з періодом його коливань, то балістичний маятник не встигає помітно відхилитись від вихідного положення за час зіткнення. У такому випадку можна вважати, що під час удару не виникають сили, які б намагалися повернути маятник у початкове положення. Враховуючи це, можна прийняти, що система куля-маятник є замкнутою. Для замкнутої системи можна застосувати закони збереження

імпульсу та моменту імпульсу.

Позначимо, що m – маса кулі; v – швидкість кулі до зіткнення; v_1 – швидкість кулі та маятника після зіткнення (куля застряє в пластиліні). Нехай M – маса маятника, тоді на основі закону збереження імпульсу

$$mv = (m+M)v_1 . \qquad (1)$$

Оскільки маємо справу з обертанням, то треба було б використати закон збереження моменту імпульсу. Однак можливість використання в цьому випадку закону збереження імпульсу пов"язане з тим, що розміри маятника є досить малими порівняно з довжиною ниток підвісу, тобто цей маятник можна вважати математичним (масу маятника приймаємо за матеріальну точку). У такому випадку рівняння, яке відображає закон збереження моменту імпульсу, перетворюється у рівняння (1), яке відображає закон збереження імпульсу.

Справді, закон збереження моменту імпульсу для системи куля-маятник запишемо у вигляді

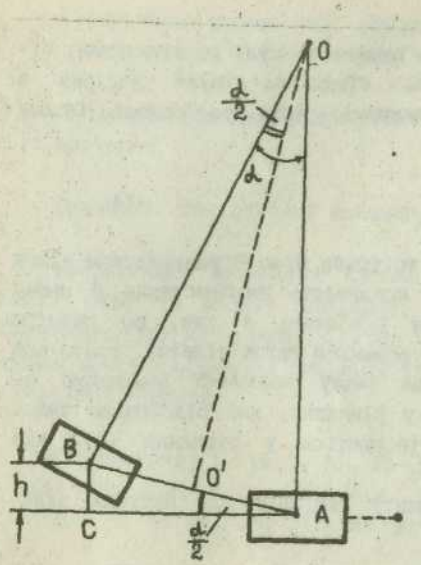
$$mvl = I\omega , \qquad (2)$$

де l – відстань від точки підвісу до центра мас системи куля-маятник; mvl – момент імпульсу кулі до удару; I – момент інерції маятника з кулею відносно осі обертання (з кутовою швидкістю $\omega = v_1/l$), $I = (m + M)l^2$.

Підставивши значення I та ω у рівняння (2), переконаємося, що воно збігається з рівнянням (1).

Для обчислення швидкості кулі v за формулою (1) потрібно дослідно визначити v_1 (маса маятника M відома, масу кулі m визначають за допомогою ваги). Швидкість v_1 можна визначити з таких міркувань. Маятник, набираючи після удару кулі швидкості v_1 і відповідної кінетичної енергії $(m+M)v_1^2/2$, виходить зі стану рівноваги і підіймається на деяку висоту h (див. рисунок). Користуючись законом збереження механічної енергії, можна записати

$$\frac{(m+M)v_1^2}{2} = (m+M)gh , \qquad (3)$$



де g – прискорення вільного падіння. З рівняння (3)

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad . \quad (4)$$

Висоту h можна визначити з вимірювань відхилення маятника від положення рівноваги та довжини його підвісу. З подібності трикутників ABC і OBO' випливає, що

$$\frac{h}{AB} = \frac{O'B}{OB} \text{, але } AB = 2O'B = s -$$

зміщення центра мас маятника від стану рівноваги, а OB – довжина підвісу маятника.

Тому $h = s^2/2l$. Підставивши значення h у формулу (4), визначимо $v_1 = s\sqrt{g/l}$. Щоб обчислити швидкість кулі v, підставляємо значення v_1 у рівняння (1), тоді отримаємо робочу формулу

$$v = s\frac{m+M}{m}\sqrt{g/l} \quad . \quad (5)$$

Порядок виконання роботи

1. Визначте, користуючись вагою, масу кулі m.
2. Запишіть масу маятника M і його довжину l (вони відомі).
3. Розмістіть відлікову шкалу біля маятника так, щоб вона була паралельна до площини коливань маятника.
4. Встановіть пружинний пістолет так, щоб політ кулі був горизонтальним і вона влучила в точку на осі маятника.
5. Вистрелiть і вимiряйте за шкалою лінійне максимальне відхилення s маятника. Дослід повторіть п"ять разів для кожної кулі.
6. Результати вимірювань запишіть у таблицю, обчисліть швидкість польоту кулі, оцініть похибку експерименту та зробіть відповідні висновки.

Контрольні запитання

1. Яка механічна система називається замкнутою?
2. Як формулюють і отримують закон збереження імпульсу?
3. Запишіть формулу, яка виражає основний закон обертального руху.
4. Що називається моментом сили?
5. Що називається моментом імпульсу?
6. Яка формула виражає момент імпульсу матеріальної точки та твердого тіла відносно нерухомо закріпленої осі?
7. Сформулюйте та виведіть закон збереження моменту імпульсу.
8. Запишіть закон збереження імпульсу та моменту імпульсу для випадку непружного зіткнення двох тіл.
9. Яка механічна система називається консервативною?
10. Сформулюйте та виведіть закон збереження механічної енергії.

Форма звіту до лабораторної роботи 124

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робоча формула з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta v = \bar{v}\left\{\left[\frac{\Delta s}{\bar{s}}\right]^2 + \left[\frac{\bar{M}\Delta m}{\bar{m}(\bar{m}+\bar{M})}\right]^2 + \left[\frac{\Delta M}{\bar{m}+\bar{M}}\right]^2 + \left[\frac{\Delta l}{2\bar{l}}\right]^2\right\}^{1/2} ; \quad \delta v = \Delta v/\bar{v} \; .$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$$M = \bar{M} \pm \Delta M; \quad m = \bar{m} \pm \Delta m; \quad l = \bar{l} \pm \Delta l;$$

№ п/п	s_1	Δs	$\delta s\%$	v	Δv	$\delta v\%$
1–5						
с/зн						

6. Кінцевий результат:

$$v = \bar{v} \pm \Delta v; \quad \delta v = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5,$$

7. Висновки.

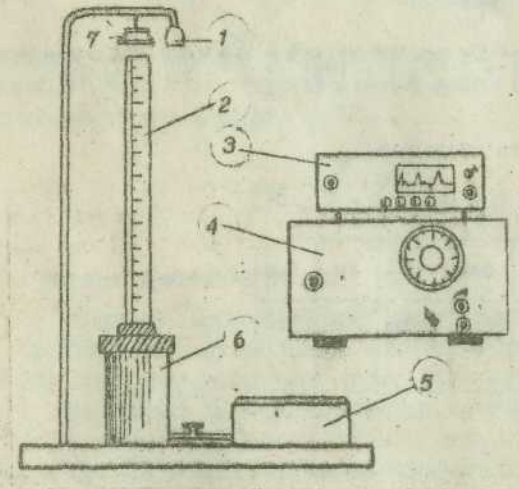
Лабораторна робота 125. **ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗВУКУ В ПОВІТРІ МЕТОДОМ СТОЯЧОЇ ХВИЛІ**

Завдання: визначити швидкість звуку в повітрі методом стоячої хвилі.

Приладдя: установка для визначення довжини звукової хвилі; звуковий генератор.

Теоретичний матеріал: хвильовий процес; рівняння біжучої хвилі; стояча хвиля та її рівняння; розподіл амплітуд коливань у стоячих хвилях різного типу; швидкість розповсюдження звуку в пружному середовищі.

Література: 2, § 85; 4, §§ 5.7-5.9, 6.1-6.3, 6.6-6.9; 5, §§ 137, 138, 140, 142.



Опис установки. Установка складається зі скляної трубки 2 та резервуара 6 з водою, з'єднаного з насосом 5 (див. рисунок) Біля трубки встановлена міліметрова шкала. За допомогою насоса воду з резервуара можна перекачувати в трубку, змінюючи цим висоту повітряного стовпця. Над відкритим кінцем трубки закріплений динамік 7, мембрана якого коливається з частотою, що її задає звуковий генератор 4. Моменти підсилення звуку можна реєструвати на слух або осцилографом 3 від мікрофона 1, встановленого над трубкою.

Виведення робочої формули. Окремим випадком інтерференції хвиль є виникнення так званих стоячих хвиль унаслідок додавання двох зустрічних біжучих хвиль однакової частоти, з однаковими амплітудами. Такі хвилі утворюються, наприклад, у результаті додавання прямої і відбитої хвиль на струні, повітряному стовпі в духових інструментах тощо.

Розглянемо закономірності утворення стоячої хвилі в трубі, заповненій повітрям і закритій з одного кінця. Нехай джерело коливань є біля відкритого кінця труби. Коливання, збуджені цим джерелом, будуть поширюватися у вигляді поздовжньої хвилі до її закритого кінця, відіб'ються і поширюватимуться до відкритого кінця труби. За деяких умов падаюча і відбита хвилі будуть інтерферувати, утворюючи стоячу хвилю.

Падаючу хвилю описує рівняння

$$\eta_1 = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right), \qquad (1)$$

а відбиту

$$\eta_2 = A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right). \qquad (2)$$

Різниця фаз між падаючою і відбитою хвилею на відстані x від закритого кінця труби

$$\frac{2\pi x}{\lambda} - \left[-\frac{2\pi x}{\lambda}\right] = \frac{4\pi x}{\lambda}, \qquad (3)$$

а різниця ходу $2x$. Однак під час відбивання хвилі від закритого кінця труби (середовища з більшим хвильовим опором) фаза змінюється на π, що відповідає зміні різниці ходу на $\lambda/2$. Тому повна різниця ходу дорівнює $2x - \lambda/2$. Згідно з умовою максимуму інтерференції на відстані x від закритого кінця труби буде максимальна амплітуда (пучність стоячої хвилі), якщо

$$k\lambda = 2x - \lambda/2,$$

звідки

$$x = k\lambda/2 + \lambda/4, \text{ де } k = 0, 1, 2... \qquad (4)$$

Найближча до закритого кінця труби пучність розміщена на відстані $x=\lambda/4$. Подальші пучності, що відповідають значенням $k = 1, 2, 3 \ldots$, розміщені на відстанях $3\lambda/4$, $5\lambda/4$, $7\lambda/4$ і т. д.

Вузли виникають там, де виконується умова мінімуму

$$(2k + 1)\lambda/2 = 2x - \lambda/2,$$

тобто в точках

$$x = \lambda(k + 1)\lambda/2, \qquad (5)$$

де $k = 0, 1, 2...$.

Для значень $k = 0, 1, 2,...$ вузли віддалені від закритого кінця труби відповідно на відстані $x = \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2,...$ і т. д.

Стояча хвиля виникає в трубі не для будь-якої частоти коливання джерела, що збуджує хвилю в трубі.

Пучності утворюються на відстані

$$x = k\lambda/2 + \lambda/4 = \lambda(2k + 1)/4 = u(2k + 1)/4\nu, \; k = 0, 1, 2... \qquad (6)$$

де u = const - швидкість поширення хвилі. Оскільки на відкритому кінці труби обов"язково утвориться пучність, то для довжини труби l стояча хвиля може утворюватися лише тоді, коли

$$\nu = u(2k + 1)/4x = u(2k + 1)/4l, \quad k = 0, 1, 2... \qquad (7)$$

Стояча хвиля виникає лише при збігові частоти коливань зовнішнього джерела з однією з власних частот стовпа повітря в трубі:

$$\nu = u(2k + 1)/4l. \qquad (8)$$

Наявність великої кількості власних частот пов"язана з тим, що стовп повітря в трубі є системою з великою кількістю ступенів свободи, оскільки він складається з великої кількості зв"язаних між собою частинок. Тому значною є і кількість власних частот. Кількість власних частот обмежена тільки тим, що речовина середовища - повітря - не безперервна, а дискретна. Власні частоти стовпа повітря в трубі, закритій з одного кінця, відносяться як

$$\nu_o : \nu_1 : \nu_2 : \nu_3 ... = 1 : 3 : 5 : 7... \qquad (9)$$

Якщо частоту залишити сталою, а змінювати довжину повітряного стовпа l, то стояча хвиля утворюватиметься, якщо

$$l = u(2k + 1)/4\nu, \text{ де } k = 0, 1, 2..., \qquad (10)$$

тобто при довжинах труби

$$l_o = u/4\nu; \; l_1 = 3l_o; \; l_2 = 5l_o.$$

Із формули (10) видно, що стояча хвиля утворюється в стовпах повітря, які при заданій частоті ν відрізняються на $u/2\nu$, тобто

$$l_{k+1} - l_k = u/2\nu, \qquad (11)$$

звідки

$$u = 2\nu(l_{k+1} - l_k). \qquad (12)$$

Остання формула і є робочою формулою для визначення швидкості звуку в повітрі методом стоячої хвилі.

Моменти утворення стоячої хвилі визначають за підсиленням звуку на слух, або за збільшенням амплітуди коливань на екрані осцилографа, на який подається сигнал від мікрофона, встановленого біля відкритого кінця труби.

Визначена за формулою (12) швидкість звуку - це швидкість звуку при температурі досліду. Тому одержаний результат потрібно стандартизувати, тобто звести до 0°С за формулою

$$u_o = u / (1 + \alpha t)^{1/2}, \qquad (13)$$

де α - коефіцієнт розширення повітря (α = 0,0041/град.).

Порядок виконання роботи

1. Увімкніть в електромережу генератор звукової частоти та встановіть задану викладачем частоту ν.
2. Відкрийте кран, який сполучає насос із водяним резервуаром, 1, накачуючи повітря, підніміть рівень води в трубі, не доходячи 10 см до її верхнього кінця.
3. Поверніть кран у таке положення, щоб рівень води повільно опускався, відмічаючи на шкалі положення п"яти-шести підсилень звуку. Дослід повторіть п"ять разів.
4. Аналогічні вимірювання виконайте для інших частот, заданих викладачем.
5. Результати вимірювань запишіть у таблицю. Обчисліть швидкість поширення звуку в повітрі. Результуючу швидкість зведіть до нормальних умов. Оцініть точність експерименту. Зробіть відповідні висновки.

Контрольні запитання

1. Що називається звуком?
2. Які параметри характеризують звук?
3. Від яких параметрів залежить швидкість поширення звуку?
4. Яка різниця між біжучою та стоячою хвилями?
5. Запишіть рівняння біжучої та стоячої хвилі.
6. Яку хвилю називають поздовжньою; поперечною?
7. Від чого залежить тип хвилі, яка виникає в тому чи іншому пружному середовищі?
8. Запишіть умову утворення стоячої хвилі в трубі, закритій з одного кінця.

9. У якому випадку підсилюється звук мембрани, розміщеної біля відкритого краю труби?

Форма звіту до лабораторної роботи 125

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робоча формула з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta u = \bar{u}\left\{[\Delta\nu/\bar{\nu}]^2 + [\Delta l_k/(\bar{l}_{k+1}-\bar{l}_k)]^2 + [\Delta l_{k+1}/(\bar{l}_{k+1}-\bar{l}_k)]^2\right\}^{1/2}; \quad \delta u = \Delta u/\bar{u};$$

$$\Delta u_o = \bar{u}_o\left\{[\Delta u/\bar{u}]^2 + [0{,}002\Delta t/(1+0{,}004\bar{t})]^2\right\}^{1/2}; \quad \delta u_o = \Delta u_o/\bar{u}_o.$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$$\nu = \bar{\nu} \pm \Delta\nu; \quad t = \bar{t} \pm \Delta t;$$

		k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$	$k+5$
№п/п 1–5	l_i						
с/зн							
u $(k+n)-(k+n-1)$							

$$l_k = \bar{l}_k \pm \Delta l_k; \quad l_{k+1} = \bar{l}_{k+1} \pm \Delta l_{k+1}; \quad l_{k+2} = \bar{l}_{k+2} + \Delta l_{k+2};$$

$$l_{k+3} = \bar{l}_{k+3} \pm \Delta l_{k+3}; \quad l_{k+4} = \bar{l}_{k+4} + \Delta l_{k+4}; \quad l_{k+5} = \bar{l}_{k+5} + \Delta l_{k+5};$$

$$u_1 = \bar{u}_1 \pm \Delta u; \quad \delta u_1 = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5.$$

Аналогічно для u_2, u_3, u_4, u_5 та результуючої u.

6. Кінцевий результат:

$$u_o = \bar{u}_o \pm \Delta u_o; \quad \delta u_o = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5.$$

6. Висновки.

Лабораторна робота 127. **ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕРТЯ КОЧЕННЯ**

Завдання: вивчити явища тертя ковзання та кочення шляхом експериментального визначення коефіцієнта тертя кочення різних матеріалів.

Приладдя: лабораторна установка; секундомір; лінійка; металева тригранна призма; набір досліджуваних матеріалів: сталь, латунь, мідь, алюміній, оргскло, вакуумна гума.

Теоретичний матеріал: сили тертя; класифікація сил тертя; тертя ковзання та кочення; момент сили; центр мас; закон збереження енергії; коефіцієнти тертя кочення та ковзання.

Література: 1, §§ 21, 25, 36; 2, §§ 24, 30, 32; 5, §§ 3, 8, 39, 41, 42, 72, 75.

Опис установки. Основним елементом установки (рис. 1) для визначення коефіцієнта тертя кочення є циліндр 2, розміщений на горизонтальній сталевій плиті 3. На циліндр напресовано обойму, у діаметральних точках якої закріплені два стержні. Стержень 1 є стрілкою шкали; на стержні 5 можна пересувати і закріплювати вантаж 4. Рухому частину установки можна назвати маятником. Відхиляючись від стану рівноваги, маятник починає виконувати згасаючі коливання. Вісь циліндра при цьому рухається поступально, а циліндр обертається навколо своєї осі. Під циліндр можна підкладати пластинки з різних матеріалів, що дає змогу визначити коефіцієнти тертя кочення для пари матеріалів циліндр-пластинка.

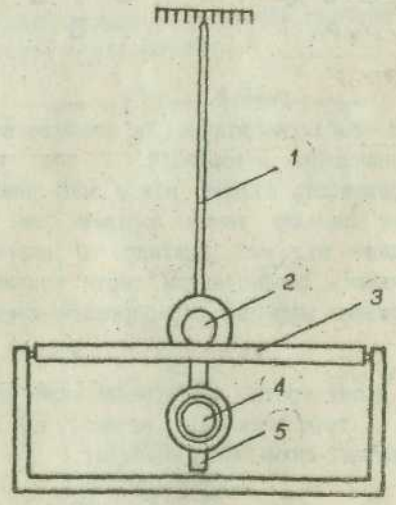


Рис. 1.

Виведення робочої формули. Під час кочення тіла, що має криволінійну поверхню, по іншому тілу з плоскою чи криволінійною поверхнею виникає опір, який називається тертям кочення. Природа тертя кочення є інша, ніж природа тертя ковзання. Опір кочення залежить від пружних властивостей матеріалу тіл, кривини їхніх поверхонь і нормальної сили, яка діє між тілами.

Розглянемо два тіла: циліндр, розміщений на пластині (рис. 2). Циліндр *1* притискається до пластини *2* силою *P*. Оскільки циліндр і пластина не є абсолютно твердими тілами, то в зоні їхнього дотику під дією сили *P* виникає деяка зона змикання. Напруженість у зоні змикання розподіляється за еліптичним законом. Рівнодійна напруженості *N* у цьому випадку дорівнює силі *P*, напрямлена протилежно і діє по одній лінії з нею. Під час кочення циліндра діаграма зміниться (рис. 2,*B*). На ділянці *bc* виникає зона наростаючих, а на ділянці *ab* – зникаючих деформацій. У зоні наростаючих деформацій нормальна напруженість більша, ніж у зоні зникаючих. Рівнодійна напруженості в цьому випадку також дорівнює за значенням вазі циліндра *P*, але зміщена від осі циліндра *O* вперед на величину *k* (цю величину називають коефіцієнтом тертя кочення). Отже, під час кочення тіла обертання потрібно переборювати момент сили тертя

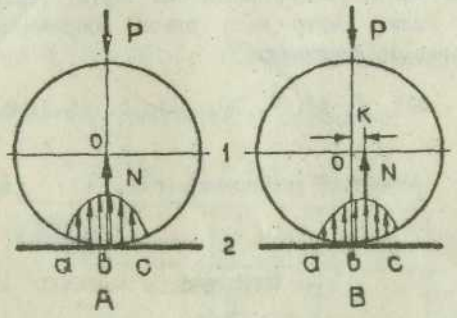


Рис. 2.

$$M = kP. \qquad (1)$$

При цьому треба, щоб момент сили (дорівнює силі тертя спокою), який діє в горизонтальній площині на висоті осі циліндра, дорівнював моментові сили тертя кочення:

$$Fr = kP, \qquad (2)$$

або

$$F = \frac{kP}{r}, \qquad (3)$$

де r – радіус циліндра.

Відхилення стрілки за шкалою (рис. 3) складається з двох відхилень:

$$a_1 = r \operatorname{tg} \alpha \quad і \quad a = L \operatorname{tg} \alpha, \qquad (4)$$

де a_1 – зміщення осі циліндра внаслідок його поступального руху; a – відхилення, спричинене обертанням циліндра навколо осі; α – кут повороту циліндра; L – відстань від осі циліндра до шкали. Сумарне відхилення стрілки

$$s = r \operatorname{tg} \alpha + L \operatorname{tg} \alpha = a\,(1 + r/L). \qquad (5)$$

При $r \ll L$ можна знехтувати величиною r/L, тоді

$$s = a = L \operatorname{tg} \alpha. \qquad (6)$$

Якщо $\alpha < 5°$, то для початкового відхилення (α_0, a_0) і відхилення після n повних коливань (α_n, a_n) відповідно

$$\alpha_0 = a_0/L; \quad \alpha_n = a_n/L. \qquad (7)$$

Зменшення кута відхилення за відому кількість періодів коливань дає змогу обчислити значення коефіцієнта тертя кочення.

Уважаючи, що коефіцієнт тертя кочення не залежить від швидкості руху маятника, використаємо закон збереження енергії. Для початкового відхилення маятника на кут α_0 його потенціальну енергію можна записати у вигляді (рис. 4)

$$E = Ph_0 = Pl(1 - \cos \alpha_0), \qquad (8)$$

де h_0 – вертикальне зміщення точки центра мас маятника; l – відстань від осі обертання до його центра мас.

Через один повний період потенціальна енергія маятника

$$E = Pl(1 - \cos \alpha), \qquad (9)$$

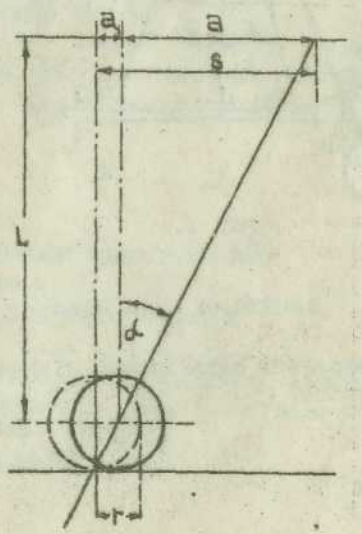


Рис. 3.

де α_1 – кут, на який відхилився маятник через T секунд. Зменшення потенціальної енергії за один повний період

$$\Delta E = Pl(1-\cos\alpha_0) - Pl(1-\cos\alpha_1) = 2Pl\left(\sin^2\frac{\alpha_0}{2} - \sin^2\frac{\alpha_1}{2}\right). \qquad (10)$$

Для малих кутів відхилення маятника ($\alpha < 5^\circ$) $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$, тому

$$\Delta E = 2Pl\left[\frac{\alpha_0^2}{4} - \frac{\alpha_1^2}{4}\right] = \frac{Pl}{2}(\alpha_0^2 - \alpha_1^2) . \qquad (11)$$

Зміна енергії за повний період коливання маятника дорівнюватиме роботі сил тертя кочення (силами опору повітря нехтуємо):

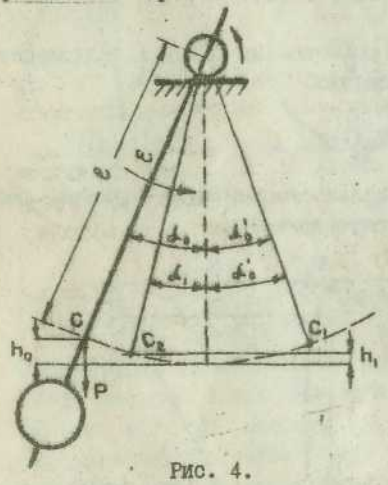


Рис. 4.

$$\Delta A = kP(\alpha_0+\alpha_0'+\alpha_0'+\alpha_1), \qquad (12)$$

де α_0' – кут відхилення після одного півперіоду коливання; k – коефіцієнт тертя кочення. Вилучимо з рівняння (12) α_0'. Нехай $\Delta\alpha$ – зменшення кута відхилення маятника за один півперіод, тоді

$$\alpha_0' = \alpha_0 - \Delta\alpha ;$$
$$\alpha_0' = \alpha_1 + \Delta\alpha . \qquad (13)$$

Із формул (12) та (13) отримуємо

$$\Delta A = kP(\alpha_0+\alpha_0-\Delta\alpha+\alpha_1+\Delta\alpha+\alpha_1) = 2kP(\alpha_0+\alpha_1) . \qquad (14)$$

Порівнявши між собою вирази (11) та (14), одержимо

$$\frac{Pl}{2}(\alpha_0^2-\alpha_1^2) = 2kP(\alpha_0+\alpha_1),$$

звідки

$$k = \frac{l}{4}(\alpha_0-\alpha_1) . \qquad (15)$$

Для n повних коливань

$$k = \frac{l}{4n}(\alpha_0-\alpha_n) . \qquad (16)$$

Підставивши в цей вираз $\alpha_0 = a_0/L$ та $\alpha_n = a_n/L$, одержимо робочу формулу

$$k = \frac{l}{4nL}(a_0-a_n) . \qquad (17)$$

Порядок виконання роботи

1. Вимірявте за шкалою початкове відхилення маятника a_0 та його відхилення a_n через n повних коливань. Вимірювання повторіть п"ять разів для кожної пари матеріалів.
2. Вимірявте масштабною лінійкою значення L та l. Щоб визначити положення центра мас маятника, покладіть його на ребро тригранної металевої призми та зрівноважте. Вимірявте відстань від осі коливань маятника до ребра призми.
3. Результати вимірювань запишіть у таблицю. Обчисліть значення коефіцієнтів тертя кочення для трьох досліджуваних матеріалів. Оцініть точність експерименту, зробіть відповідні висновки.

Контрольні запитання

1. Наведіть класифікацію сил тертя.
2. Які причини призводять до виникнення тертя ковзання?
3. Поясніть виникнення тертя кочення.
4. Який фізичний зміст має коефіцієнт тертя кочення?
5. Що називається моментом сили?
6. Що називається центром мас? Як його експериментально визначити?
7. Сформулюйте закон збереження механічної енергії. Як його використано в цій роботі?
8. Які коливання називаються затухаючими?
9. Виведіть робочу формулу.

Форма звіту до лабораторної роботи 127

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робоча формула з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta k = \bar{k}\left[\left(\frac{\Delta l}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{\bar{L}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a_o}{\bar{a}_o - \bar{a}_n}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a_n}{\bar{a}_o - \bar{a}_n}\right)^2\right]^{1/2}; \quad \delta k = \Delta k/\bar{k}\ .$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$l = \bar{l} \pm \Delta l$; $\delta l =$;

$L = \bar{L} \pm \Delta L$; $\delta L =$;

$a_o = \bar{a}_o \pm \Delta a_o$; $\delta a_o =$;

№ п/п	n	a_{n1} і	k_1	Δk_1	δk_1%	a_{n2} і	k_2	Δk_2	δk_2%	a_{n3} і	k_3	Δk_3	δk_3%
1–5													
с/зн	50												

$a_{n1} = \bar{a}_{n1} \pm \Delta a_{n1}$; $\delta a_{n1} =$; $p =$; $n = 5$;

$a_{n2} = \bar{a}_{n2} \pm \Delta a_{n2}$; $\delta a_{n2} =$; $p =$; $n = 5$;

$a_{n3} = \bar{a}_{n3} \pm \Delta a_{n3}$; $\delta a_{n3} =$; $p =$; $n = 5$.

6. Кінцеві результати:

$k_1 = \bar{k}_1 \pm \Delta k_1$; $\delta k_1 =$; $p =$; $n = 5$;

$k_2 = \bar{k}_2 \pm \Delta k_2$; $\delta k_2 =$; $p =$; $n = 5$;

$k_3 = \bar{k}_3 \pm \Delta k_3$; $\delta k_3 =$; $p =$; $n = 5$.

7. Висновки.

Лабораторна робота **128. ДОСЛІДНА ПЕРЕВІРКА РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ**

Завдання: перевірити дослідним шляхом справедливість рівняння Бернуллі.

Приладдя: експериментальна установка; мензурка; секундомір.

Теоретичний матеріал: ідеальна рідина; лінії та трубка течії; поле швидкостей; стаціонарний рух рідини; теорема про нерозривність струменя; закон збереження енергії; рівняння Бернуллі; динамічний, гідростатичний та статичний тиски.

Література: 2, §§ 93, 95; 4, §§ 7.1–7.4, 7.6, 7.8; 5, §§ 37, 102; 6, §§ 72–74; 7, §§ 4.5.

Опис установки. Установка для дослідної перевірки рівняння

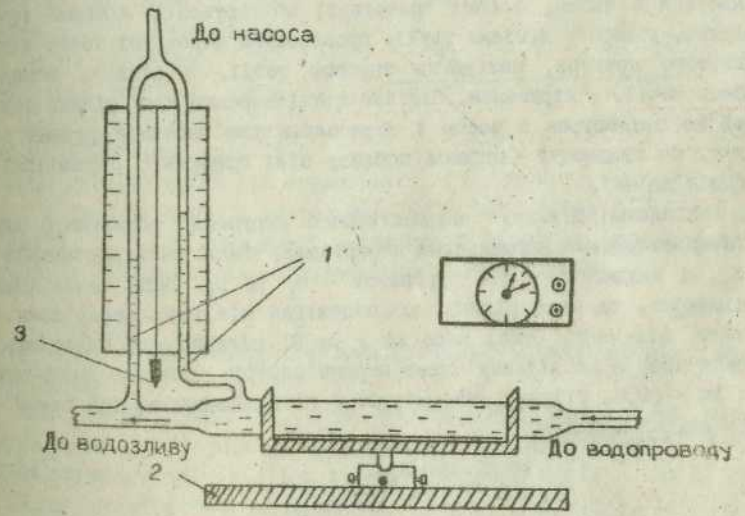


Рис. 1.

Бернуллі в трубкою змінного перерізу (рис. 1). Від кожного перерізу відходять вертикальні манометричні трубки *1*, сполучені між собою та через кран з насосом для нагнітання повітря. Міліметрова лінійка дає

змогу визначати різницю тисків в обох перерізах. Трубка змінного перерізу шарнірно прикріплена до підставки 2, її можна виставити і закріпити у горизонтальному положенні (контролюють виском 3).

Виведення робочих формул. Стан руху рідини можна характеризувати, задавши для кожної точки простору вектор швидкості частинок рідини як функцію часу

$$v = f(r,t),$$

де r - радіус-вектор, проведений від початку координат у задану точку простору.

Сукупність векторів $v(r)$, заданих для всіх точок простору, утворює поле вектора швидкостей, яке можна зобразити за допомогою ліній течії. Це такі лінії, дотична до яких у кожній точці потоку збігається з напрямом вектора швидкості. Якщо розподіл швидкостей у потоці не змінюється з часом, то течія рідини називається стаціонарною. У цьому випадку траєкторії руху частинок також не змінюються з часом, а самі траєкторії збігаються з лініями течії. Поверхню, утворену лініями течії, проведеними через усі точки малого замкнутого контура, називають трубкою течії, а рідину, обмежену трубкою течії, - струменем. Під час стаціонарного руху рідини трубки течії не змінюються з часом і становлять для частинок рідини ніби стінку, бо швидкості частинок поблизу цієї поверхні спрямовані по дотичній до неї.

Розглянемо ділянку елементарного струменя, обмеженого двома довільно вибраними нормальними перерізами, площі яких дорівнюють S_1 та S_2, а швидкості в цих перерізах - v_1 та v_2. Якщо течія рідини стаціонарна, то маса рідини, що міститься між цими перерізами, не залежить від часу. Отже, маса $\Delta m = \rho v_1 S_1$ рідини, яка надходить за одиницю часу в цю ділянку через перший переріз, повинна дорівнювати масі $\Delta m = \rho v_2 S_2$ рідини, яка витікає з цієї ділянки за той самий час через другий переріз:

$$\rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2 . \qquad (1)$$

У випадку нестисливої рідини (ρ = const) рівняння (1) набуває вигляду

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 . \qquad (2)$$

Оскільки перерізи S_1 та S_2 вибрані довільно, то

$$vS = \text{const} . \qquad (3)$$

Одержана рівність становить суть теореми про нерозривність струменя (потоку): маса рідини, що проходить за одиницю часу через кожний поперечний переріз трубки течії, для всіх перерізів однакова.

Стаціонарний рух ідеальної нестисливої рідини в полі тяжіння описує рівняння Бернуллі. Його отримують за допомогою застосування до руху рідини в тонкій трубці течії закону збереження енергії. Нехай у місці перерізу S_1 швидкість течії v_1, тиск p_1 і висота, на якій є цей переріз, h_1. Аналогічно у місці перерізу S_2 швидкість течії v_2, тиск p_2 і висота перерізу h_2. За малий проміжок часу Δt рідина переміщується від перерізів S_1 і S_2 до перерізів S_1' і S_2'.

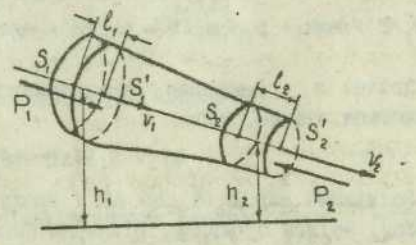


Рис. 2.

Згідно з законом збереження механічної енергії, зміна повної енергії $E_2 - E_1$ ідеальної нестисливої рідини повинна дорівнювати роботі A зовнішніх сил по переміщенню маси m рідини:

$$E_2 - E_1 = A , \qquad (4)$$

де E_1 і E_2 - повні енергії рідини масою m у місцях перерізів S_1 і S_2 відповідно.

З іншого боку, A - це робота, яка виконується під час переміщення всієї рідини, розташованої між перерізами S_1 і S_2 за малий проміжок часу Δt. Для перенесення маси m від S_1 до S_1' рідина повинна переміститися на відстань $l_1 = v_1 \Delta t$ і від S_2 до S_2' - на відстань $l_2 = v_2 \Delta t$. Зауважимо, що l_1 і l_2 настільки малі, що всі точки виділених об"ємів мають сталі значення швидкості v, тиску p і висоти h. Отже,

$$A = F_1 l_1 = F_2 l_2 , \qquad (5)$$

де $F_1 = p_1 S_1$ і $F_2 = -p_2 S_2$ (від"ємна, оскільки спрямована протилежно до напряму руху рідини).

Повні енергії E_1 і E_2 будуть складатися з кінетичної та потенціальної енергій маси m рідини:

$$E_1 = mv_1^2/2 + mgh_1 \; ; \qquad (6)$$

$$E_2 = mv_2^2/2 + mgh_2 \; . \qquad (7)$$

Підставивши вирази (6) і (7) у формулу (4) та прирівнявши (4) і (5), отримаємо

$$mv_1^2/2 + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = mv_2^2/2 + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t \; . \qquad (8)$$

Згідно з рівнянням нерозривності струменя (3) об"єм рідини залишається сталим, тобто

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t. \qquad (9)$$

Розділимо вираз (8) на ΔV і врахуємо, що ми вибирали довільні перерізи, звідси отримаємо рівняння Бернуллі

$$\rho v^2/2 + \rho gh + p = const, \qquad (10)$$

де ρ - густина рідини.

Рівняння Бернуллі стверджує, що для стаціонарної течії ідеальної нестисливої рідини сума динамічного $(\rho v^2/2)$, гідростатичного (ρgh) і статичного (p) тисків залишається сталою уздовж довільної лінії течії.

Справедливість рівняння Бернуллі перевіряють шляхом порівняння об"ємної витрати води, визначеної за різницею тисків у перерізах (на основі рівняння Бернуллі) з об"ємною витратою води, виміряною за допомогою мензурки та секундоміра.

Нехай площі поперечних перерізів трубки дорівнюють S_1 і S_2, відповідні їм швидкості руху води - v_1 і v_2, тиски - p_1 і p_2. Тоді рівняння Бернуллі для горизонтальної трубки та умова нерозривності потоку такі:

$$p_1 + \rho v_1^2/2 = p_2 + \rho v_2^2/2 \; ; \quad D_1^2 v_1 = D_2^2 v_2 \; , \qquad (11)$$

де D_1 і D_2 - діаметри трубки. Розв"язавши систему рівнянь (11) щодо v_2, отримаємо

$$v_2 = \sqrt{2(p_1 - p_2)/\rho(1 - D_2^4/D_1^4)} \; . \qquad (12)$$

Витрата води (об"єм води, який проходить через поперечний переріз за одну секунду)

$$Q = S_2 v_2 = \frac{\pi D_2^2}{4}\sqrt{2(p_1 - p_2)/\rho(1 - D_2^4/D_1^4)} \; . \qquad (13)$$

Різниця тисків, виміряна за допомогою манометра,

$$p_1 - p_2 = \rho gh \; , \qquad (14)$$

де ρ - густина води; h - різниця висот стовпів води в колінах манометра.

Підставивши значення $p_1 - p_2$ з виразу (5) у (4) і беручи до уваги, що $D_1^4 >> D_2^4$ (у нашій установці $D_1 = 22$ мм, $D_2 = 11$ мм), отримаємо першу робочу формулу для обчислення витрати води

$$Q = \frac{\pi D_2^2}{4}\sqrt{2gh} \; . \qquad (15)$$

Другою робочою формулою буде

$$Q' = V/t \; , \qquad (16)$$

де V - об"єм води, що натікає в мензурку за час t .

Порівнюючи значення витрати води Q зі значенням Q', переконуємося в справедливості рівняння Бернуллі.

Порядок виконання роботи

1. Гумовий шланг, з"єднаний з великим перерізом трубки (див. рис.1.), сполучіть з водопровідним краном, а гумовий шланг, з"єднаний з малим перерізом, скеруйте у водозлив.

2. Установіть трубку горизонтально. Горизонтальне положення трубки контролюйте за допомогою виска.
3. Частково відкривши водопровідний кран, пустіть воду через установку. При цьому кран насоса повинен бути закритий.
4. Відлічіть різницю рівнів h води в обох колінах манометра. При потребі висоту стовпів у колінах манометра можна змінити додатковим тиском над ними, накачавши повітря насосом.
5. Вставте водозливний шланг у мензурку, увімкнувши одночасно секундомір; вимкніть секундомір у момент відведення шланга від мензурки. Вимірювання повторіть п"ять разів.
6. Аналогічні вимірювання виконайте для трьох різних значень швидкості потоку, яку регулюйте водопровідним краном.
7. Результати вимірювань запишіть у таблицю; обчисліть витрати води Q і Q' та порівняйте їх для кожного значення h_1, h_2, h_3. Обчисліть похибки експерименту. Зробіть відповідні висновки.

Контрольні запитання

1. Яку рідину називають ідеальною? Що називається лінією течії; трубкою течії; полем швидкостей; стаціонарною течією?
2. Сформулюйте і доведіть теорему про нерозривність струменя.
3. Сформулюйте і доведіть закон збереження механічної енергії.
4. Сформулюйте і виведіть рівняння Бернуллі.
5. Що називається питомою кінетичною енергією рідини; питомою потенціальною енергією рідини; питомою енергією тиску?
6. Виведіть робочі формули.
7. Як розподілені тиски в рідині, що тече по горизонтальній трубі зі змінним поперечним перерізом?
8. Виведіть робочі формули.
9. Який фізичний зміст рівняння Бернуллі?
10. Наведіть приклади застосування наслідків, які випливають з рівняння Бернуллі.

Форма звіту до лабораторної роботи 128

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робочі формули з розшифруванням величин.

4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta Q = \bar{Q}\left[(2\Delta D_2/\bar{D}_2)^2 + (\Delta h/2\bar{h})^2\right]^{1/2}; \qquad \delta Q = \Delta Q/\bar{Q};$$

$$\Delta Q' = \bar{Q}'\left[(\Delta V/\bar{V})^2 + (\Delta t/\bar{t})^2\right]^{1/2}; \qquad \delta Q' = \Delta Q'/\bar{Q}'.$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$$D_2 = \bar{D}_2 \pm \Delta D_2; \qquad V = \bar{V} \pm \Delta V;$$

$$h_1 = \bar{h}_1 \pm \Delta h_1; \qquad h_2 = \bar{h}_2 \pm \Delta h_2; \qquad h_3 = \bar{h}_3 \pm \Delta h_3;$$

№ п/п	h_t м	t_t с	Q $м^3/с$	ΔQ $м^3/с$	δQ %	Q' $м^3/с$	$\Delta Q'$ $м^3/с$	δQ %
1-5								
с/зн								

6. Кінцеві результати:

$$Q_1 = \bar{Q}_1 \pm \Delta Q_1; \quad \delta Q_1 = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5;$$

$$Q_1' = \bar{Q}_1' \pm \Delta Q_1; \quad \delta Q_1' = \quad ; \quad p = \quad ; \quad n = 5.$$

Аналогічні таблиці та кінцеві результати оформіть для інших заданих викладачем різниць висот.

7. Висновки.

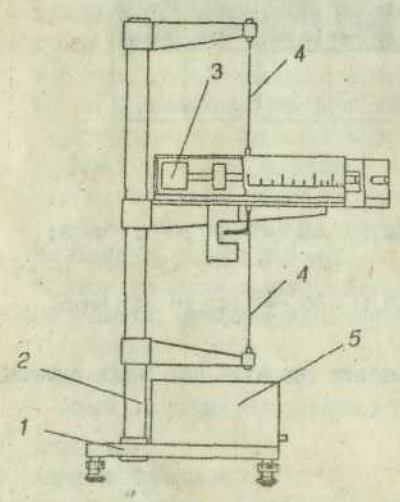
Лабораторна робота 129. **ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ПОЛЬОТУ КУЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ КРУТИЛЬНО-БАЛІСТИЧНОГО МАЯТНИКА**

Завдання: визначити, використовуючи закони збереження, швидкість польоту кулі за допомогою крутильно-балістичного маятника.

Приладдя: крутильно-балістичний маятник; пружинний пістолет; секундомір; міліметрова лінійка; штангенциркуль; куля.

Теоретичний матеріал: момент інерції; момент сили; момент імпульсу; механічна енергія поступального та обертального рухів; основний закон обертального руху; закони збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії; рівняння руху балістичного маятника; абсолютно пружне та непружне зіткнення.

Література: 1, §§ 21, 22-25, 31-34, 39-41; 2, §§ 3, 10, 11, 12, 22, 25-28, 30-33; 3, §§ 6.1-6.9, 7.1-7.5, 7.8-7.12, 9.1, 9.4, 9.8, 9.9; 4, 5.1; 5, §§ 37, 53, 54; 7, §§ 4.5, 5.2.



Опис установки. Крутильно-балістичний маятник (див. рисунок) змонтований на основі *1*, що опирається на чотири ніжки, висоту яких можна регулювати (вирівнювати прилад). На основі закріплені електронний блок *5* та колонка *2*. До колонки прикріплені верхній, нижній та середній кронштейни. До середнього кронштейна прикріплений пружинний пістолет, прозорий екран з градусною шкалою та фотоелектричний датчик. Верхній і нижній кронштейни мають затискачі для кріплення сталевої дротини *4*, на якій підвішено маятник *5*, що складається з двох мисочок, наповнених пластилін, двох стержнів, по яких можуть пересуватися і на яких закріплюють тягарі. Фотоелектричний датчик з"єднаний з мілісекундоміром. На його передній панелі розміщені вікна цифрових індикаторів мілісекундоміра, лічильника періодів та три кнопки керування. Кнопкою "Сеть" вмикають установку в електромережу; кнопкою "Сброс" обнулюють мілісекундомір та лічильник періодів; кнопкою "Стоп" зупиняють цикл вимірювання через один період після її натискання.

Виведення робочої формули. Після вцілення кулі в мішень балістичного маятника він починає виконувати крутильні коливання навколо своєї вертикальної осі. Якщо під час його руху знехтувати моментом сил тертя, то можна використати два закони збереження. На основі закону збереження моменту імпульсу, уважаючи удар абсолютно непружним, можна записати (до удару і після)

$$mvr = (I_1 + mr^2)\omega \,, \qquad (1)$$

де m - маса кулі; v - її швидкість до удару; r - відстань від осі обертання маятника до точки удару кулі; ω - кутова швидкість маятника; I - його момент інерції.

Закон збереження механічної енергії (після удару)

$$\frac{1}{2}(I_1 + mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}b\alpha^2 \,, \qquad (2)$$

де α - найбільший кут повороту маятника; b - модуль кручення підвісу маятника. З цих рівнянь одержуємо

$$v^2 = \frac{b\alpha^2(I_1 + mr^2)}{m^2r^2} \,. \qquad (3)$$

Оскільки момент інерції кулі mr^2 набагато менший від I_1, то рівняння (3) можна записати у вигляді

$$v^2 = \frac{b\alpha^2 I_1}{m^2 r^2} \quad . \qquad (4)$$

Будемо вважати, що $\tau << T$, тобто час дії кулі на маятник набагато менший від періоду коливань балістичного маятника. Рівняння руху балістичного маятника за цих умов можна записати у вигляді

$$I_1 d^2\alpha / dt^2 = - b\alpha \ , \qquad (5)$$

де α - кут повороту маятника; $d^2\alpha/dt^2 = \varepsilon$ - кутове прискорення. Розв"язок цього рівняння приводить до виразу для періоду крутильних коливань

$$T_1 = 2\pi \sqrt{I_1/b} \quad . \qquad (6)$$

Для вилучення з останньої формули невідомої величини b змінимо момент інерції балістичного маятника, змістивши вантажі на іншу відстань від осі маятника, тоді

$$T_2 = 2\pi \sqrt{I_2/b} \quad , \qquad (7)$$

де T_2 - період коливання маятника при новому значенні моменту інерції I_2 .

З формул (6) і (7) одержимо

$$I_1/I_2 = T_1^2/T_2^2 \quad . \qquad (8)$$

Якщо різницю моментів інерції маятника позначимо через ΔI , тобто

$$\Delta I = I_1 - I_2,$$

то з формули (8) одержимо

$$I_1/\Delta I = T_1^2/(T_1^2 - T_2^2) \ . \qquad (9)$$

З формули (6)

$$b = 4\pi^2 I_1/T_1^2 \ . \qquad (10)$$

Підставивши в рівняння (4) значення b з (10), а значення I_1 з (9), для швидкості кулі отримаємо вираз

$$v = \frac{2\pi\alpha T_1 \Delta I}{mr(T_1^2 - T_2^2)} \quad . \qquad (11)$$

Величину ΔI можна визначити, використавши такі рівняння:

$$I_1 = I_o + 2MR_1^2 \ ; \qquad (12)$$

$$I_2 = I_o + 2MR_2^2 \ . \qquad (13)$$

де I_o - момент інерції маятника без вантажів; I_1 - момент інерції маятника, якщо обидва вантажі розташовані на відстані R_1 від осі обертання; I_2 - на відстані R_2 ; M - маса одного вантажу. Нехай $R_1 > R_2$, тоді з рівнянь (12) і (13) одержуємо

$$\Delta I = I_1 - I_2 = 2M(R_1^2 - R_2^2) \ . \qquad (14)$$

Із рівнянь (11) і (14) визначаємо робочу формулу для обчислення швидкості польоту кулі:

$$v = \frac{4\pi MT_1}{mr(T_1^2 - T_2^2)}(R_1^2 - R_2^2)\alpha \ , \qquad (15)$$

де α - кут максимального відхилення маятника після вцілення в нього кулі, виражений у радіанах:

$$\alpha = \pi\, \alpha^0/180^0.$$

Примітка. Якщо кут повороту маятника визначають за відхиленням світлового "зайчика", то

$$\alpha = n/2L,$$

де L - відстань від дзеркальця до світлового "зайчика"; n - кількість

поділок шкали, на яке він зміщується.

Порядок виконання роботи

1. Увімкніть установку балістичного маятника в електромережу (натисніть кнопку "Сеть").
2. Перевірте, чи маятник є в нульовому положенні. Якщо потрібно, виконайте коректування.
3. Установіть додаткові тягарі на відстані R_1. Вистріліть і виміряйте кут максимального відхилення маятника α. Вимірювати можна в тому випадку, якщо кулька прилипла до пластиліну.
4. Натисніть кнопку "Сброс". При цьому обнуляться цифрові індикатори і розпочнеться цикл вимірювання часу та кількості періодів. Якщо на лічильнику періодів з"явиться число 9, натисніть кнопку "Стоп". Через один період закінчиться цикл вимірювання. На лічильнику періодів засвітиться число 10, а мілісекундомір покаже час t_1, протягом якого маятник виконав десять коливань. Вимірювання виконайте п"ять разів.
5. Установіть тягарі на відстані R_2. П"ять разів виміряйте час t_2 (аналогічно до вимірювання часу t_1).
6. На аналітичній вазі визначте масу кульки m. По шкалі, нанесеній на чашці з пластиліном, виміряйте відстань r.
7. Результати вимірювань запишіть у таблицю. Обчисліть періоди T_1 і T_2. За робочою формулою обчисліть швидкість кулі v та оцініть точність експерименту.

Контрольні запитання

1. Що називається моментом інерції; моментом сили; моментом імпульсу?
2. Сформулюйте та запишіть закон збереження моменту імпульсу.
3. Сформулюйте закон збереження механічної енергії.
4. Який удар називається непружним?
5. Запишіть закон збереження моменту імпульсу для випадку непружного зіткнення кулі з балістичним маятником, поясніть написане.
6. Запишіть закон збереження механічної енергії для маятника, який виконує крутильні коливання.
7. Виведіть робочу формулу.

1. Завдання.
2. Рисунок установки.
3. Робоча формула з розшифруванням величин.
4. Формули для обчислення похибок:

$$\Delta v = \bar{v}\left\{\left[\Delta M/\bar{M}\right]^2 + \left[\Delta m/\bar{m}\right]^2 + \left[\Delta\varphi/\bar{\varphi}\right]^2 + \left[\Delta r/\bar{r}\right]^2 + \left[2\bar{R}_1\Delta R_1/(\bar{R}_1^2-\bar{R}_2^2)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[2\bar{R}_2\Delta R_2/(\bar{R}_1^2-\bar{R}_2^2)\right]^2 + \left[2\bar{T}_2\Delta T_2/(\bar{T}_1^2-\bar{T}_2^2)\right]^2 + \left[\Delta T_1(\bar{T}_1^2+\bar{T}_2^2)/\bar{T}_1(\bar{T}_1^2-\bar{T}_2^2)\right]^2\right\}^{1/2};$$

$$\delta v = \Delta v/\bar{v}.$$

5. Результати вимірювань та обчислень:

$M = \bar{M} \pm \Delta M$; $m = \bar{m} \pm \Delta m$; $r = \bar{r} \pm \Delta r$; $R_1 = \bar{R}_1 \pm \Delta R_1$; $R_2 = \bar{R}_2 \pm \Delta R_2$;

№ п/п	n	t_1 с	T_1 с	α^0	t_2 с	T_2 с	v м/с	Δv м/с	δv %
1-5									
$\bar{c}$/зн.									

$T_1 = \bar{T}_1 \pm \Delta T_1$; $T_2 = \bar{T}_2 \pm \Delta T_2$; $\alpha = \bar{\alpha} \pm \Delta\alpha$.

6. Кінцевий результат:

$v = \bar{v} \pm \Delta v$; $\delta v =$; $p =$; $n = 5$.

7. Висновки.

Навчальне видання

Олександр Олексійович Логвиненко,
Ярослав Арсентович Пастирський

Рисунки Галини Тарасівни Йост

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА:
лабораторний практикум з механіки
для студентів університету

Підписано до друку 31.03.95. Формат 60 x 84/16.
Папір друк №3. Офс. друк. Умов. друк. арк. 6,3.
Умовн. фарбовідб. 6,3. Обл.- вид. арк. 7,0. Тираж 400 прим.Зам. 313

Машинно-офсетна лабораторія Львівського державного університету,
290602 Львів, вул. Університетська, 1.